昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2010年5月1日発行　第48巻5号　毎月1回1日発行
ISSN 0386―2240

数理科学

5
2010

特集　物理学事始め
各分野へのガイド



No.563

サイエンス社

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-72：for Senior & Graduate Courses）

超関数・フーリエ変換入門

基礎から偏微分方程式への応用まで

磯崎　洋　著

本体 1857 円　　送料 290 円　　表示価格は税抜きです

超関数，フーリエ変換は，元々物理学の問題を扱う計算に端を発し，後に数学として確立したものである．本書はそんな歴史背景を踏まえつつ，初学者がわかりやすいよう種々配慮したテキストである．予備知識としては，微積分と複素関数論のみを仮定し，ルベーグ積分については心にとめておくべき事柄を序文にまとめた．位相ベクトル空間の議論は最低限にとどめ，実際の問題に現れる例を多く挙げ，詳しく説明することに主たる目標を置いた．微積分，微分方程式，関数解析の初歩と同様，解析学の基礎にして，数学の基本的概念であるという観点に立って入門的解説に努めた好著．

第１章　可積分関数のフーリエ変換

第２章　解析関数とフーリエ変換

第３章　１変数の超関数

第４章　多変数の超関数

第５章　楕円型方程式

第６章　定常位相の方法

第７章　波動方程式

付　録　補遺

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 563 May 2010

物理学事始め

各分野へのガイド

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．郵送料小社負担にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は 1 年間（本誌のみ）11,000 円，1 年間（本誌＋別冊 2 冊）14,500 円，半年間（本誌のみ）5,500 円，半年間（本誌＋別冊 1 冊）7,250 円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2007 年/5 省略
2007 年/6 物理における位相の世界
/7 代数的物理観
/8 数学における場の量子論
/9 ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊 素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ
2008 年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊 多様体の広がり
/5 物理と数学の難所
/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊 対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観
2009 年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求
2010 年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展

数理科学臨時別冊一覧

08 年/7 ネットワーク科学への招待
08 年/9 物理のためのリー群とリー代数
08 年/11 量子暗号理論の展開
09 年/1 量子力学の考え方
09 年/7 ゲージ理論の発展
09 年/9 量子コンピュータの基礎［第 2 版］
09 年/11 重点解説 基礎微分幾何
09 年/12 ε–δ 論法再入門
10 年/1 多彩な量子の世界
10 年/3 超関数・フーリエ変換入門

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
ジュンク堂書店（盛岡）
ジュンク堂書店（新潟）
旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

——大学生協・売店——
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

May 2010 MATHEMATICAL SCIENCES Number 563

特集／物理学事始め

大学に入っての物理学

和田 純夫

高校では「物理」としてまとめて教えられていたものが，大学に入るといくつかの分野に分けられる．カリキュラムには，「力学（古典力学）」，「電磁気学」，「熱力学（熱学）」，「統計力学（統計物理）」，「流体力学」，「量子力学」，「相対性理論」といった名称が並ぶ（ここでは基礎的な分野に限る）．これらの分野がどのようなものなのか，大学で長く講義にあたってこられた先生方に紹介していただく，というのがこの特集の趣旨である．大学で新たにこれらの講義を受けようとしている方々，あるいは一度は学んだが，講義をする側はどのような観点から各分野を見ているのか興味があるという方々に，何らかのインスピレーションを与えることができれば幸いである．

執筆者の方々には，各分野でそれぞれ3つほどのポイント（落語でいうところの三題噺といった感覚）を中心に解説するという他は，特に制約なく書いていただいた．その結果，明確に3つのポイントとは言えない記事もあるが，多彩で読みごたえのある記事が集まった．執筆者の方々の物理観の一端が見えて興味深いが，この巻頭の文では読者のために，物理学全体から見たときの各分野の位置付け，そして各原稿ではその中の何が強調されているかという点を簡単にまとめてみたい（説明の都合で，紹介の順と掲載の順は少しずれる）．

大学の物理の授業は力学から始まるが，物理学の歴史も力学から始まった．量子力学と区別するときには，**古典力学**あるいは**ニュートン力学**ともいうが，この名前からも想像されるように，17世紀末にニュートンによって確立された学問といえる．では，ニュートンは実際には何をしたのか．この特集の江沢（以下，敬称略）の解説はそこに焦点を当てている．

ニュートンは『プリンキピア（プリンシピア）』という書物の最初の部分で，先人が確立した法則として**運動の三法則**をあげる[1)]．そしてそれを出発点として，この自然界のどの物体の間にも，距離の二乗に反比例する力（万有引力）が働いているという主張を展開する．しかしその手法は現代風の微積分ではない．幾何学的な手法が使われる．このことが我々にとって不思議なのは，微積分の考え方を考案したのもニュートンだからである．といっても，微分の考え方と，『プリンキピア』で使われた幾何学的手法には共通点もある．江沢の解説では『プリンキピア』第I編命題11（楕円軌道からの逆二乗則の導出）を取り上げて，ニュートンの手法が説明される[2)]．

電磁気学は19世紀，アンペール，ファラデーたちの貢献があったのち，マクスウェルによって完成された．電磁気の基本方程式は**マクスウェルの方程式**と呼ばれる（近重の解説を参照）．これは，電気現象と磁気現象を統一的に説明した理論であ

る．電磁誘導からもわかるように，両者は密接に結びついている．

電磁気学は，電場・磁場の波，つまり**電磁波**というものの存在を明らかにしたが，そもそも電場・磁場の実体は何か，という疑問には電磁気学は答えられなかった．電磁波とは，何かが振動している現象ではないかと想像する人が最初は多かったが，実験により否定され，さらに20世紀初頭の**特殊相対性理論**の登場により，理論的にも成り立たないことがわかった（二間瀬の解説を参照）．電磁波とは何かの振動状態ではなく，電磁波自体が実体をもつものという考え方が定着していった（ただし，その実体とは何かという問題はまだ解決されたとは言えず，量子力学での電子の波は何を意味するかと同等の問題として残されている）．

相対性理論は，電場・磁場という概念にも大きな影響を与えた．磁気現象のように見られる現象が，見方によっては（観察する基準によっては）電気現象にも見えることがある．相対性理論は，時間と空間は独立したものではなく，時空という統一した枠組みの中で理解しなければならないことを示したが（二間瀬），それと同様に，電場と磁場も，**電磁場**という一つの場の両側面であると捉える必要があることもわかった．近重の解説では，電場と磁場の入れ替わり（相対性）のことが詳しく説明される．

物質の振舞いは，その構成粒子一つずつの振舞いの結果であることは間違いないが，自然界の現象には，そのような把握の仕方では理解できないことが無数にある．むしろ物質全体の状態を表現する概念が役に立つ．例えば温度とかエネルギーといった量だが，さらに**エントロピー**という概念が登場し，**熱力学**と呼ばれる分野が登場した．物質が何であるかに関わらずこれらの量の間には一定の関係があるという，ある意味で不思議な法則が熱力学の基本である．

熱力学自体は物質をマクロな視点からしか見ないが，それをミクロな視点と結び付けようとするのが**統計力学**である．熱力学の範囲内では実験によってしか確定できないエントロピーという量を，ミクロな状態数 Ω というものから計算しようというのが統計力学の基本である．そこでは物質の状態を原子レベルから考えるが，原子一つずつの動きは追わずに，状態の集合を統計的に考えるという手法が使われる．その段階で温度という概念も厳密に定義される．この手続きは吉岡の解説に詳しい．

このようにして具体的に表したエントロピーを熱力学の法則にあてはめると，物質それぞれの興味深い性質がわかる．その具体例として田中の解説ではゴムの話が扱われる．**ゴムの弾性**は統計性にその原因があって，熱・統計力学の威力が存分に発揮される話題だが，最近活発に進められているソフトマター研究の代表でもある．

流体力学も，流体中に含まれる無数の粒子を個別に扱うのではなく，連続的に広がった物体として扱う．それに働く力は粘性力である（ちなみに，粘性を考えた水の回転の問題は，すでに『プリンキピア』で，デカルトの渦動説（宇宙空間にある目に見えない渦が惑星を動かしているという説）を批判するために扱われている）．面白いのは，流体の振舞いは，慣性の効果と粘性の効果の比率で決まるので，慣性・粘性それぞれは大幅に違う流体でも比率が同じならば類似の振舞いを示すことである．流体の特徴的な運動形態は**渦**だが，それは飛行機の揚力にも，そして超低温での液体ヘリウムの振舞いにも，重要な役割を果たしている．

20世紀になって，古典力学に代わる新しい原理，**量子力学**が出現した．原子・分子が関わる現象が観測できるようになってきたとき，古典力学にしろ電磁気学にしろ，従来の理論だけでは対応できないことが明らかになったからである．それは1900年のプランクの論文から始まったが，プランクが主張したことについて，一部の日本の教科書には誤解が見られる．アインシュタインの果たした役割にも注意しなければならない．和田の解説では，この点についての説明をしたのち，量子力学が意味する新しい自然観について議論をする．量子力学では，「電子は粒子にも見えるし波のようにも見える」といった奇妙な話が出てきて，初学者そし

て専門家も悩ませる．いったい電子とは何か．それは実在するものと考えていいのか．実在するのは波なのか粒子なのか，といった話をするが，これはまだコンセンサスができていない難しい問題である．

古典力学から量子力学への変化は，我々が見ている自然界のスケールの変化でもある．物理学は，目に見えるレベルの世界だけを対象としていた時代から，**原子・分子の世界**を通して自然界を見る学問になった．原子の構造を研究することにより，陽子，中性子，そしてそれらを構成するさらに基本的な粒子（クォークなど）の存在も明らかになった．日置による解説はその過程の概観である．

このような進歩の上に立って，現在の物理学の研究が進められている．クォークより先には何があるのかを研究する素粒子物理学，すでに確立している量子力学や統計物理を縦横に使って進める物性物理学など多彩だが，それはこの特集の範囲を超えた話である．

注と参考文献

1) ニュートンの運動の法則という言い方は 19 世紀になってから広まったらしい．
2) 私自身も最近，プリンキピア全体の紹介を書いた．和田純夫『プリンキピアを読む—ニュートンはいかにして万有引力を証明したのか』（ブルーバックス）．
3) 例えば朝永振一郎『量子力学』（みすず書房）．良書との定評のある本だが，科学史的には間違いがあるとも指摘されている．

（わだ・すみお，東京大学大学院総合文化研究科）

ニュートンは何を見たか

江沢　洋

■ 1. ニュートンという人 ■

I. ニュートンは1642年にイギリス中西部のコルスターワース（Colsterworth）村に近いウールズソープ（Woolsthorpe）に生まれた（図1）．その3ヶ月前に父は亡くなっていた．未熟児であまりに小さく，生きのびられないだろうといわれた．3歳のとき母は63歳の牧師と再婚，ニュートンはウールズソープに祖母と残された．彼が通った小学校は程度が低かった．グランサムの中学校に進んだが，成績は最下位から2番目だった．模型つくりに熱中し，『自然と技術の神秘』を読みノートをとった．1659年にデカルトの『幾何学』を買った[2]．

1661年にケンブリッジ大学の入学試験に合格したが，ユークリッド幾何学の点は足りなかった[3]．教師の靴を磨いたりする給費生になったのである．ここではデカルト，コペルニクス，ケプラー，ガリレオを読み，数学の教師であったウォリスやバロウの本を勉強した．1665年に卒業したが，この年，ペストが大流行して大学は閉鎖，ニュートンはウールズソープに帰って静かな時を過ごした．彼の才能が開花したのは，このときである．1665年から万有引力の法則を惑星の運動に適用した．

1667年にケンブリッジに戻り，大学院に入った．翌年，トリニティ・カレッジのフェローに推され，さらに翌年にはバロウの辞任の後をうけてルカス教授となる．この年『無限個の項をもつ方程式による解析』を回覧したが，出版は1711年になる．「光学」を講じたけれど評判はよくなく，聴講する学生も少なかった．発表した光学の論文はR. フックやC. ホイヘンスの反対にあい，もう論文は出すまいと決心した．彼は一生，他者からの批判を恐れていたという．光学の研究をまとめた原稿は書き重ねられていたが，『光学』の出版は1704年になる．1684年にはE. ハリーが惑星の運動の理論を公表するよう促したが，ためらいに加えて「球体の引力が中心に質量が集中した場合に等しい」ことの証明ができていないという理由で断った．この証明は1686年に完成し，翌年『自然哲学の数学的諸原理』（プリンシピア）が出版される．

1693年，ニュートンは強い鬱病にかかり，研究を断念する[4]．1665年の大学卒業から数えても28年間の研究生活であった．ホイヘンスは，ニュートンは科学界から失われたと考えた[5]．ニュートンは，その後1704年に『光学』を出版，1713年，1726年には『プリンシピア』を改訂し，それぞれコーツ（R. Cotes），ペンバートン（H. Pemberton）の編集で出版した．彼は晩年を神学と年代学の研究に捧げ，1727年3月20日に亡くなった．

■ 2. 光学 ■

ニュートンの光学についても書きたいことはたくさんあるが，今回は彼が長い間に書きためて1704年に出した『光学』の巻末につけた31の「疑問」から二，三を引用するだけにする[6]．

疑問 3　光の射線は，物体の橋や側面のそばを通過するとき鰻のような運動をして，行ったり来たり何度も曲げられるのではないか．（後略）

疑問 17　静水に石を投げ，それによってひきおこされた波は，石が投げ込まれた場所でしばらく発生しつづけ，そこから同心円となって水面上をとおくまで伝播される．（中略）光の射線が任意の透明な物体の表面に落ちて，そこで屈折ないし反射されるとき，入射点



図 1　コルスターワース村は矢印のところ，×印をつけた．ロンドン，ケンブリッジ，オックスフォードとの相対位置に注目．地図は Encyclopædia Britannica[1] より転載．また，地図中の×印，矢印は編集部にて加筆追記．

で屈折または反射されるとき振動または震えの波がひきおこされる．これらの振動は入射点から遠くまで伝播されつづけるのではないか．（後略）

疑問 18　二個の大きく高い円筒形のガラス容器をさかさまに置き，その中にそれぞれ小さい温度計を容器に触れないように吊し，容器の一つから空気を抜いた上で，冷たい場所から温かい場所に移すと，真空中の温度計は，真空中にない温度計と同じ温かさに，ほとんど同じくらい速くなるであろう．（中略）温かい部屋の熱は，空気を抜いたのちも，真空中にのこる空気よりもはるかに微細な**媒質の振動**によって，真空中を伝えられるのではないか．そして，この媒質は，光がそれによって屈折され反射され，またその振動によって光が物体に熱を伝え，また反射の**発作**（fit）と透過の発作をおこさせる媒質と同じものではないか．（後略）

なお，疑問 17 から 24 までは第 2 版（1717/18）で追加された．

■ 3. 微分積分法の創始 ■

ニュートンは 1671 年に書き 1736 年に出版した『無限級数と流率法』において**流率**（fluxion）の概念を導入したが[7,8]，胎動は早くから始まっていた．

彼の流率法の発見に最も強い影響をおよぼしたのはデカルトの『幾何学』だといわれる[9]．彼は，与えられた曲線の法線を決定するデカルトの方法に強い関心を示し，多くの曲線に対してこれを試みた．

デカルトはこうしたのだ[10]．曲線 AB 上の点 C における法線を CP とする（図 2）．

もし，P と少しだけ異なる点 P′ をとると半径 P′C の円はその曲線と 2 つの点 C, E で交わることになろう．$P' \to P$ とすると $E \to C$ となる．これは，P を中心とする半径 PC の円と曲線 AB の交点の方程式は C を二重根としてもつことを意味している．この二重根ということを条件として P を求めればよいというのがデカルトの主張である．

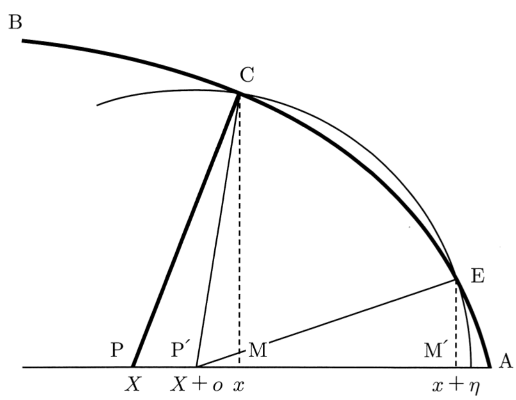


図 2　曲線 $y=f(x)$ の法線の求め方．

これから，どのようにしてニュートンが流率法，すなわち今日いう微分法に思いいたったのかは推測するしかないが，おそらく次のように考えたのではないだろうか．

直線 PA を x 軸とし，それに垂直に y 軸をとる（図 2）．曲線の方程式を $y=f(x)$ とし，点 P, P′, M, E の x 座標を $X, X+o,\ x,\ x+\eta$ とすれば，$\overline{\mathrm{P'C}}=\overline{\mathrm{P'E}}$ は

$$(x-X-o)^2+f(x)^2=(x+\eta-X-o)^2+f(x+\eta)^2 \tag{3.1}$$

となる．ニュートンにならって無限小の量を o と書いた．これを

$$f(x+\eta)^2-f(x)^2=(x-X-o)^2-(x+\eta-X-o)^2$$

と書き直し，さらに

$$\{f(x+\eta)+f(x)\}\frac{f(x+\eta)-f(x)}{\eta}$$
$$=-2(x-X-o)-\eta$$

と書き直して，$o\to 0$ とすれば（すなわち $P'\to P$ とすれば），そのとき $E\to C$ となるべきだから，$\eta\to 0$ となるべきで

$$f(x)f'(x)=-(x-X) \tag{3.2}$$

が得られる．ここで，今の記法で

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{f(x+\eta)-f(x)}{\eta}=f'(x) \tag{3.3}$$

とおいた．これから，点 C が与えられると（すなわち x と $f(x)$ が与えられると）X が定まり，つまり法線 CP が定まる．

(3.2) が正しい方程式であることは，今の目で見れば，$f'(x)$ が点 C における曲線 AB の接線の勾配をあたえ，したがって $-1/f'(x)$ が C における法線の勾配であることから分かる．

ニュートンは $o\to 0$ とは言わず，しかし o は非常に，非常に小さいとし，そのときには η も非常に小さいはずだと考えたのだろうと思う．

この推測の根拠は，ニュートンが次に考えた曲率半径の求め方に見られる．図 3 において，三角形の相似から

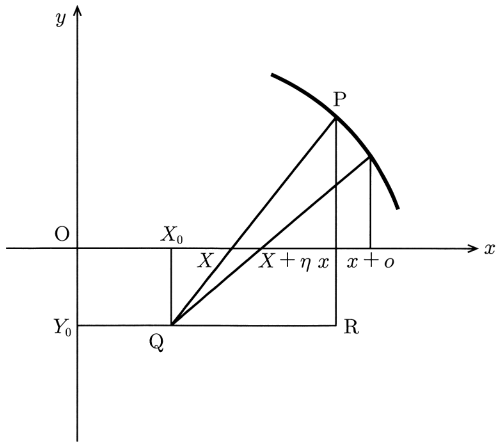


図 3　曲線 $y=f(x)$ の曲率半径を求める．点 P における曲率中心を (X_0, Y_0) とする．

$$\frac{x-X}{f(x)}=\frac{x-X_0}{f(x)-Y_0}, \tag{3.4}$$

$$\frac{x+o-X-\eta}{f(x+o)}=\frac{x+o-X_0}{f(x+o)-Y_0} \tag{3.5}$$

となるが，それぞれの左辺の分子に対しては (3.2) が成り立つから

$$-f'(x)=\frac{x-X_0}{f(x)-Y_0},\quad -f'(x+o)=\frac{x+o-X_0}{f(x+o)-Y_0}.$$

したがって，$x-X_0$ が 2 通りに書けて

$$-f'(x)\bigl\{f(x)-Y_0\bigr\}=-f'(x+o)\bigl\{f(x+o)-Y_0\bigr\}-o$$

が得られる．整理して

$$f'(x+o)f(x+o)-f'(x)f(x)=Y_0\bigl\{f'(x+o)-f'(x)\bigr\}-o.$$

この左辺は

$$\bigl\{f'(x+o)-f'(x)\bigr\}f(x+o)+f'(x)\bigl\{f(x+o)-f(x)\bigr\}$$

と書けるから，両辺を o で割って

$$\frac{f'(x+o)-f'(x)}{o}f(x+o)+f'(x)\frac{f(x+o)-f(x)}{o}$$
$$=Y_0\frac{f'(x+o)-f'(x)}{o}-1$$

を得る．

この計算をしたとき，ニュートンにまだ導関数の概念はなく，ましてそのための記号はもっていなかった[11)]．しかし，o は小さいとして，左辺の第 1 項の $f(x+o)$ を $f(x)$ に置き換え

$$\frac{f'(x+o)-f'(x)}{o}\bigl\{f(x)-Y_0\bigr\}$$
$$=-f'(x)\frac{f(x+o)-f(x)}{o}-1 \tag{3.6}$$

と書くことはできたようである．この式から $f(x)-Y_0$ が得られるから，曲率半径は

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\left(\overline{\mathrm{PR}}^2+\overline{\mathrm{QR}}^2\right)^{1/2} \tag{3.7}$$

と求められる．ここに

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PR}}&=f(x)-Y_0,\\ \overline{\mathrm{QR}}&=-f'(x)\overline{\mathrm{PR}}=-f'(x)\{f(x)-Y_0\}\end{aligned} \tag{3.8}$$

である．

ニュートンも，$f(x)$ が具体的に与えられれば，たとえば $f(x)=x^n$ ならば

$$\begin{aligned}f'(x)\ &=\ \frac{(x+o)^n-x^n}{o}\\ &=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o\\ &\quad+\frac{n(n-1)(n-2)}{3}x^{n-3}o^2+\cdots\end{aligned}$$

の $o, o^2+\cdots$ を落として

$$f'(x)=nx^{n-1} \tag{3.9}$$

とすることはできた．

$$\frac{f'(x+o)-f'(x)}{o}=n(n-1)x^{n-2} \tag{3.10}$$

もできたのである．これらを用いて，曲線 $y=x^n$ の x における曲率半径は

$$(\text{曲率半径})=\frac{(1+n^2x^{2(n-1)})^{3/2}}{n(n-1)x^{n(n-1)}} \tag{3.11}$$

となる．

今日のわれわれは

$$\lim_{o\to 0}\frac{f'(x+o)-f'(x)}{o}=f''(x) \tag{3.12}$$

と書いて

$$(\text{曲率半径})=\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{\bigl\{1+f'(x)^2\bigr\}^{3/2}}{f''(x)} \tag{3.13}$$

とすることができる．

さて,「流量」(fluens),「流率」(fluxion) の言葉が登場するのは前に掲げたニュートンの著書『無限級数と流率法』であるが，ここにきて変わったのは微小量 o が固定した量ではなく，0 に向かって連続的に減り続ける量として運動感覚で捉えられるようになったことである．x とともに変化するのが流量である．連続的に減り続ける o を用いて

$$\frac{f(x+o)-f(x)}{o} \tag{3.14}$$

とした比が流量 f の流率であって，$\dot{f}$ と書かれる．流率 $\dot{f}$ の**流率**は $\ddot{f}$ と書かれる．減り続ける o との比と

しての流率は 1687 年にでた『プリンシピア』では補助定理として次のように規定されている[12)]：

> いくつかの量が，またいくつかの量の間の比が，任意の有限な時間中たえず相等しくなる方向に向かい，その時間の終りに近づくほどますます―**任意に与えられた値よりも**―**互いに近づく**とすると，それらの量並びに比は極限においては相等しい．

「任意に与えられた値よりも互いに近づく」という表現は，1821 年になって A.L コーシーが発明する ε–δ 論法を思わせる．

ニュートンは，さらに注解を加えている[13)]．ぜひ読んで欲しい．

流率法は以後 100 年間，哲学的問題とされた．たとえばバークリー大僧正はこう批判した[14)]．

> フラクションとは何か？ いわく evanescent increments の速度である．しからば evanescent increments とは何か？ それは有限なものにもあらず無限小の量にもあらず，しかも無にもあらず，われわれはこれを the ghosts of departed quantities と呼んでもよいのではないか．

ニュートンにおいては (3.14) の極限 $o \to 0$ の存在は自明のものとして前提されていた．それが存在しない場合が間もなく発見され，さらに x 軸上いたるところでその極限をもたない関数が発見される．

■ 4. プリンシピア ■

1687 年に出版された『自然哲学の数学的諸原理』（プリンシピア）は前節に述べた流率法を武器として物体の運動の法則を述べ，宇宙の構造を解き明かそうとするものであるが，まずいくつかの定義を述べ，運動の法則を公理として述べることから始まる．

4.1 定義と公理

定義 1． **物質量**とは密度と体積の積である．

この定義では，密度の意味がはっきりしないので，しばしば問題とされる．この定義の説明の中でニュートンは，自身の実験から知られる事実として物質量が重量に比例すると言っているので，重量で物質量を測ることにすれば（重量は場所によってちがうなどと言わなければ）物質量の意味は明確になる．

定義 2． **運動量**とは速度と物質量の積である．

この定義に問題はない．続いて述べられる「定義 3」は物質の内在力とは慣性のことだといい，「定義 4」は外力とは物体の状態を変えるために物体におよぼされる作用であるというので，運動の法則があれば不要である．続く「定義 5」から「定義 6」も向心力の説明にすぎない．

これらの定義の後，ニュートンは時間と空間について説明している．「絶対空間は，その本性として，どのような外的事物とも関係なく，常に同じ形を保ち，不変不動のものです」は，この説明にどれほどの意味があるかはともかく，**絶対空間**の存在を言っていることには注目すべきだろう．

絶対空間の存在の証として，ニュートンは回転するバケツの中の水はまわりにゆくほど盛り上がるという例などをあげ，回転する空間が異質であることを述べている．E. マッハは，1883 年の『力学の批判的発展史』において，ニュートンのいう絶対空間も恒星などの物質の分布に相対的に定まっているにすぎないといって批判した[15)]．

さて，運動の法則であるが，これは**公理，または運動の法則**と題されている．最近の数学では，公理は論理的に無矛盾な体系の基礎とされ自然法則とは切り離されてしまったが，ニュートンのいう公理は，当然のことながら，まだユークリッドの公理が自然法則とみなされていた時代のものである．

法則 I． すべて物体は，静止の状態，あるいは直線上の一様な運動の状態を，外力によってその状態を変えられないかぎり，そのまま続ける．

ここに説明を加えて，「諸惑星は，抵抗の僅少な空間中において前進運動も円運動もともにさらに長い時間持続する」と書いたのは筆のすべりであろう．

法則 II． 運動の変化は，及ぼされる起動力に比例し，その力が及ぼされる直線の方向におこる．

この法則は法則 I を起動力ゼロの特別の場合として含み，したがって法則 I は必要がないという議論もある．それに対して法則 I は法則 II の成り立つ座標系をきめているのだという議論もある．

法則 III． 作用に対し反作用は常に逆向きで相等しいこと．あるいは，二物体の相互の作用は常に相等しく逆向きであること．

4.2 惑星の運動

『プリンシピア』の内容を窺うために，惑星の運動から万有引力の逆 2 乗法則を導くところを紹介しよう．第三章の命題 11・問題 6 である[16)]．ニュートンは逆に，力の逆 2 乗法則から惑星の運動を導き出すこともしている．そこまで紹介する紙数のないのが残念である．

惑星（質量 m）が点 P で太陽 S に引かれる力を F とすれば，**太陽に向かって落ちる**加速度は $\alpha = F/m$ であって，図 4 で時間 o の間に惑星が P から Q まで変位したとすれば，$\mathrm{R_1}$ を $\mathrm{QR_1} \mathbin{/\!/} \mathrm{SP}$ なる点として

$$\overline{\mathrm{QR_1}} = \frac{1}{2}\alpha\, o^2$$

となる．惑星の**面積速度** $\dot{A}$ は一定であって—その証明もニュートンはしているが，いま書く紙数がない[17)]—，時間 o の間に惑星と太陽を結ぶ直線が掃く面積は，T を Q から SP に下ろした垂線の足とすれば

$$(\triangle\mathrm{SPQ}\ \text{の面積}) = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{SP}}\cdot\overline{\mathrm{QT}} = \dot{A}\, o$$

である．これら 2 式から o を消去すれば

$$\frac{F}{m} = \frac{8\dot{A}^2}{\overline{\mathrm{SP}}^2}\cdot\frac{\overline{\mathrm{QR_1}}}{\overline{\mathrm{QT}}^2} \qquad (4.1)$$

となる．この第 2 因子 $\overline{\mathrm{QR_1}}/\overline{\mathrm{QT}}^2$ が一定であることを示せば，太陽が惑星を引く力 F が両者の**距離** $\overline{\mathrm{SP}}$ **の 2 乗に反比例**することがいえる．

その証明をするために，若干の準備事項を用意しよう．

4.2.1 準備事項

図 4 に示す楕円に次の性質がある．楕円の長径 $\overline{\mathrm{CA}}$ を a，短径 $\overline{\mathrm{CB}}$ を b，楕円の焦点を S，H，楕円の中心を C とする．R は点 P における接線と Q から PC に平行に引いた直線との交点，接線 PR に平行な CD と PS の交点を E とする．

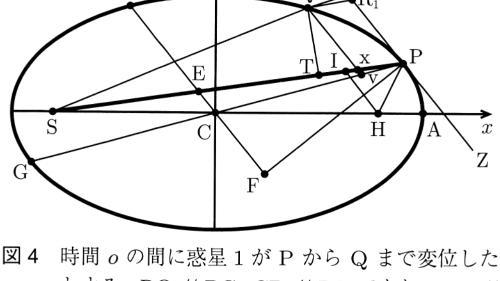


図 4　時間 o の間に惑星 1 が P から Q まで変位したとする．RQ // PC. CD // PR であり，$\mathrm{QR_1}$// PS である．

(a)　$\overline{\mathrm{PE}} = a$

(b)　図 4 において Q から RP に平行に引いた直線と PC の交点を v，PC の延長が楕円と交わる点を G とすれば

$$\frac{\overline{\mathrm{Pv}}\cdot\overline{\mathrm{Gv}}}{\overline{\mathrm{Qv}}^2} = 2\frac{\overline{\mathrm{CP}}^2}{\overline{\mathrm{CD}}^2}.$$

(c)　P における楕円の法線と CD の交点を F とすれば

$$\overline{\mathrm{FP}}^2 = \frac{a^2b^2}{\overline{\mathrm{CD}}^2}.$$

ニュートンは，これらの公式は説明なしに用いているが，以下に証明を与える．

(a) の証明

焦点 H から PR に平行に引いた直線と PS の交点を I とすれば，$\angle\mathrm{RPI} = \angle\mathrm{ZPH}$ であるから $\triangle\mathrm{PIH}$ は二等辺三角形になる．また $\triangle\mathrm{SHI}$ を見れば $\overline{\mathrm{SE}} = \overline{\mathrm{EI}}$ である．よって

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PE}} &= \frac{1}{2}\left\{\overline{\mathrm{PE}} + (\overline{\mathrm{PI}} + \overline{\mathrm{EI}})\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{(\overline{\mathrm{PE}} + \overline{\mathrm{ES}}) + \overline{\mathrm{PH}}\right\} = \frac{1}{2}\cdot 2a = a.\end{aligned}$$

(b) の証明

C を原点に図 4 のように x 軸，y 軸をとり，点の座標を $\mathrm{P}(x,y)$, $\mathrm{R}(X,Y)$, $\mathrm{D}(U,V)$, $\mathrm{v}(u,v)$, $\mathrm{Q}(r,s)$ とする．

PC の延長が楕円と交わる点を G とすれば，Pv と Gv の勾配は y/x であり，G の座標は $(-x,-y)$ であるから

$$\overline{\mathrm{Pv}}^2 = \left\{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right\}(u-x)^2,$$

$$\overline{\mathrm{Gv}}^2 = \left\{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right\}(u+x)^2,$$

Qv は RP に平行であるから，勾配は $dy/dx = -(b/a)^2(x/y)$ となり

$$\overline{\mathrm{Qv}}^2 = \left\{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^4\left(\frac{x}{y}\right)^2\right\}(X-x)^2.$$

したがって

$$\frac{\overline{\mathrm{Pv}}\cdot\overline{\mathrm{Gv}}}{\overline{\mathrm{Qv}}^2} = \frac{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^4\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\,\frac{x^2-u^2}{(X-x)^2}. \qquad (4.2)$$

他方，

$$\overline{\mathrm{CP}}^2 = x^2 + y^2 = \left\{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right\}x^2 \qquad (4.3)$$

であり，CD は PR に平行に引いたので勾配は $-(b/a)^2(x/y)$ であるから

$$\overline{\mathrm{CD}}^2=\left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)^4\left(\frac{x}{y}\right)^2\right\}U^2$$

である．ここで

$$\frac{V}{U}=-\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{x}{y}$$

に注意すれば，(U,V) が楕円の上にあることから

$$1=\frac{U^2}{a^2}+\frac{V^2}{b^2}=\left\{\frac{1}{a^2}+\frac{b^2}{a^4}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right\}U^2$$
$$=\frac{b^2}{a^2y^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)U^2=\frac{b^2}{a^2y^2}U^2$$

となる．故に

$$U^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2y^2$$

となり

$$\overline{\mathrm{CD}}^2=\left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)^4\left(\frac{x}{y}\right)^2\right\}\left(\frac{a}{b}\right)^2y^2. \quad (4.4)$$

(4.2) は，(4.3), (4.4) により

$$\frac{\overline{\mathrm{Pv}}\cdot\overline{\mathrm{Gv}}}{\overline{\mathrm{Qv}}^2}=\frac{\overline{\mathrm{CP}}^2}{\overline{\mathrm{CD}}^2}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{y}{x}\right)^2\cdot\frac{x^2-v^2}{(X-x)^2} \quad (4.5)$$

となる．

この式の右辺を計算しよう．いま，$x-X$ を微小とすれば $X-r$ も微小となる．(r,s) は楕円の上にあるから

$$\frac{(r-X+X)^2}{a^2}+\frac{(s-Y+Y)^2}{b^2}=1$$

となるが，$X-r$, $Y-s$ は微小であるから

$$(r-X+X)^2=2X(r-X)+X^2,$$
$$(s-Y+Y)^2=2Y(s-Y)+Y^2$$

とみてよい．したがって

$$\frac{2X(r-X)}{a^2}+\frac{2Y(s-Y)}{b^2}+\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1.$$

同様に，(x,y) は楕円の上にあり，$X-x$, $Y-y$ は微小であるから

$$\frac{2X(x-X)}{a^2}+\frac{2Y(y-Y)}{b^2}+\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$

が成り立つ．それぞれの第 2 項で RQ は PC に平行，PR は勾配が $-(b/a)^2x/y$ を用い，辺々引くと

$$\left(\frac{X}{a^2}+\frac{y}{x}\frac{Y}{b^2}\right)(r-X)-\left\{\frac{X}{a^2}-\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{x}{y}\frac{Y}{b^2}\right\}(x-X)=0 \quad (4.6)$$

が得られる．この第 1 項では $x-X$ が微小であるから，X, Y を x, y で置き換えてもよい．第 2 項では，その置き換えをすると 0 になってしまうから

$$\frac{1}{a^2y}(Xy-Yx)=\frac{1}{a^2y}\{(X-x)y-x(Y-y)\}$$
$$=\frac{1}{a^2y}\left(y+\frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{y}\right)(X-x)$$
$$=\frac{b^2}{a^2y^2}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}\right)(X-x)$$

とする．すると (4.6) は

$$\frac{1}{x}(r-X)+\frac{b^2}{a^2y^2}(x-X)^2=0$$

となる．$r-X=v-x$ であるから，$x-v$ が微小なことを用いて $x^2-v^2=2x(x-v)$ とすれば

$$\frac{x^2-v^2}{(X-x)^2}=2x\frac{x-v}{(X-x)^2}=2x^2\frac{b^2}{a^2y^2} \quad (4.7)$$

が得られる．(4.5) の右辺に用いれば

$$\frac{\overline{\mathrm{Pv}}\cdot\overline{\mathrm{Gv}}}{\overline{\mathrm{Qv}}^2}=2\frac{\overline{\mathrm{CP}}^2}{\overline{\mathrm{CD}}^2} \quad (4.8)$$

に到達する．これが上記の (b) である．

(c) の証明

FP 上の点の座標を (ξ,η) とすれば，FP の方程式：

$$\eta-y=\frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x}(\xi-x). \quad (4.9)$$

CD 上の点の座標を (ξ,η) とすれば，CD の方程式：

$$\eta=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}\xi. \quad (4.10)$$

この方程式を

$$\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\xi x}{a^2}=0$$

と書き直し，両辺から $(x/a)^2+(y/b)^2=1$ を引く．

$$\frac{y}{b^2}(\eta-y)+\frac{x}{a^2}(\xi-x)=-1.$$

(4.9) と連立させて解くと交点 F の座標がもとまる．(4.9) から $\eta-y$ を代入して

$$\left(\frac{y^2}{b^4}\frac{a^2}{x}+\frac{x}{a^2}\right)(\xi-\eta)=-1.$$

故に

$$\xi-x=-\frac{x}{a^2}\frac{1}{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}.$$

(4.9) から

$$\eta-y=-\frac{y}{b^2}\frac{1}{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}.$$

故に

$$\overline{\mathrm{FP}}^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2=\frac{1}{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}. \quad (4.11)$$

他方，CD の方程式 (4.10) において，D の座標を

(ξ, η) とすれば，D は楕円の上にあるので

$$1 = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = \left(\frac{b^2}{a^4}\frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{a^2}\right)\xi^2$$

が成り立ち，$P(x, y)$ が楕円の上にあることから

$$\xi^2 = \frac{y^2}{b^2}a^2, \quad \eta^2 = \frac{x^2}{a^2}b^2$$

となる．したがって

$$\overline{\mathrm{CD}}^2 = \xi^2 + \eta^2 = a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right). \quad (4.12)$$

これを用いて，(4.11) は

$$\overline{\mathrm{FP}}^2 = \frac{1}{\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4}} = \frac{a^2b^2}{\overline{\mathrm{CD}}^2} \quad (4.13)$$

と書ける．これが上記の (c) である．

4.2.2 逆 2 乗法則を見いだす

(4.1) の第 2 因子が一定であることを示そう．この因子を

$$\frac{\overline{\mathrm{QR_1}}}{\overline{\mathrm{QT}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{QR_1}}}{\overline{\mathrm{Pv}}} \cdot \frac{\overline{\mathrm{Pv}}}{\overline{\mathrm{Qv}}^2} \cdot \frac{\overline{\mathrm{Qv}}^2}{\overline{\mathrm{QT}}^2} \quad (4.14)$$

と分解し，それぞれの因子を調べよう．

まず，第 1 の因子は，Q から PR に平行に引いた直線と PS の交点を x とすれば

$$\begin{aligned}\frac{\overline{\mathrm{QR_1}}}{\overline{\mathrm{Pv}}} &= \frac{\overline{\mathrm{Px}}}{\overline{\mathrm{Pv}}} && (\mathrm{QR_1Px}\ \text{は平行四辺形}) \\ &= \frac{\overline{\mathrm{PE}}}{\overline{\mathrm{PC}}} && (\triangle \mathrm{Pxv}\ \text{は}\ \triangle \mathrm{PEC}\ \text{に相似}) \\ &= \frac{a}{\overline{\mathrm{PC}}} && (\text{予備 (a) による}) \quad (4.15)\end{aligned}$$

第 2 因子は

$$\frac{\overline{\mathrm{Pv}}}{\overline{\mathrm{Qv}}^2} = \frac{2\overline{\mathrm{PC}}^2}{\overline{\mathrm{CD}}^2 \cdot \overline{\mathrm{Gv}}} \quad (\text{予備 (b) による})$$

となるから，(4.15) とかけあわせ

$$\frac{\overline{\mathrm{QR_1}}}{\overline{\mathrm{Qv}}^2} = \frac{2a\overline{\mathrm{PC}}}{\overline{\mathrm{CD}}^2 \cdot \overline{\mathrm{Gv}}} \quad (4.16)$$

を得る．

第 3 の因子は，$\Delta t \to 0$ の極限では $\overline{\mathrm{Qv}}$ は $\overline{\mathrm{Qx}}$ の極限に一致するので

$$\begin{aligned}\frac{\overline{\mathrm{Qv}}^2}{\overline{\mathrm{QT}}^2} &\to \frac{\overline{\mathrm{Qx}}^2}{\overline{\mathrm{QT}}^2} && (\Delta t \to 0\ \text{の極限}) \\ &= \frac{\overline{\mathrm{PE}}^2}{\overline{\mathrm{PF}}^2} && (\triangle \mathrm{QxT}\ \text{と}\ \triangle \mathrm{PEF}\ \text{は相似}) \\ &= \frac{a^2}{\overline{\mathrm{PF}}^2} && (\text{予備 (a) による}) \\ &= \frac{\overline{\mathrm{CD}}^2}{b^2} && (\text{予備 (c) による}) \quad (4.17)\end{aligned}$$

ここで注意．(4.17) の第 1 行で時間間隔 $o \to 0$ につれて $\overline{\mathrm{Qv}} \to \overline{\mathrm{Qx}}$ としたが，このとき $\overline{\mathrm{Qv}}$ 自身も 0 となるので，たとえば $\overline{\mathrm{Qv}} \to 3\overline{\mathrm{Qx}}$ となることはないか心配になるかもしれない．その心配はない．それは，予備 (b) から分かるように $\overline{\mathrm{Pv}}$ は $\overline{\mathrm{Qv}}^2$ のオーダーだからである．

(4.16) と (4.17) をかけあわせれば

$$\begin{aligned}\frac{\overline{\mathrm{QR_1}}}{\overline{\mathrm{QT}}^2} &\to \frac{2a \cdot \overline{\mathrm{PC}}}{b^2 \cdot \overline{\mathrm{Gv}}} \\ &\to \frac{2a}{b^2} \cdot \frac{\overline{\mathrm{PC}}}{2\overline{\mathrm{PC}}} && (\Delta t \to 0\ \text{で}\ \mathrm{v} \to \mathrm{P}) \\ &= \frac{a}{b^2} = \mathrm{const.} && (4.18)\end{aligned}$$

これで証明が終わった．こうした長い推論を幾何学的に遂行したニュートンの力には頭が下がる．

参考文献

1) Encyclopædia Britannica.
2) R. Westfall, “Never at Rest - A Biography of Isaac Newton”, Cambridge (1980).
3) M. Kline, “Mathematical Thought from Ancient to Modern Times”, Oxford (1972). p.357.
4) M. Kline, 前掲，p.359.
5) R. Westfall, 前掲，p.535.
6) I. ニュートン『光学』，島尾永康訳，岩波文庫，岩波書店 (1983), pp.302–310.
7) M. Klein, 前掲，p.361.
8) 伊藤俊太郎，原 亨吉，村田 全『数学史』，筑摩書房 (1975), p.308. この本によると，『無限級数と流率法』は冒頭部分の散逸のため正確な表題は知られていない．書かれたのも 1670〜1671 年であり，最初に刊行されたのは英訳で 1737 年の由．Kline[3] と 1 年ちがっている．
9) 伊藤俊太郎ほか，前掲，p.284.
10) 『デカルト著作集 1』，白水社 (1973), 横書き，p.35.
11) 伊藤俊太郎ほか，前掲，p.286.
12) I. ニュートン『自然哲学の数学的諸原理』，河辺六男訳，世界の名著 26，中央公論社 (1971), p.87.
13) ニュートン，前掲，pp.94–97.
14) 下村寅太郎『無限論の形成と構造』，下村寅太郎著作集 1—数理哲学・科学史の哲学，みすず書房，p.377.
15) E. マッハ『マッハ力学—力学の批判的発展史』，伏見譲訳，講談社 (1970), pp.214–224.
16) ニュートン，前掲，pp.111–112.
17) 江沢 洋『だれが原子をみたか』，岩波書店 (1976), pp.144–145 に説明がある．

（えざわ・ひろし，学習院大学名誉教授）

電磁気学

電場と磁場の相対性

近 重　悠 一

1. はじめに

この小文では，大学の理系の初年次に勉強するであろう電磁気について，1. **場**の概念，2. **電荷・電流**という場の源，3. **特殊相対性理論**という3つのキーワードを掲げて眺めてみる．

筆者が好んで教科書に指定してきたのはパーセル（E.M. Purcell）が書いた『Electricity and Magnetism 2nd ed.』[1]である．核磁気共鳴の発見者の一人で1952年のノーベル物理学賞授賞者として名高い著者が著した非常に明解で，物理の楽しさにみちたテキストであり，英文も難しくない好著である．この小文でも，この教科書に従う．これに勝るとも劣らないのが，ファインマン（R.P. Feynman）が著した『Feynman Lecture Series Vol.II』[2]である．1965年にノーベル物理学賞を受賞[*1]した20世紀の類希な天才と賞された研究者が，講義録として出版した教科書である．現在でも手に入るなかなかよい邦訳もある．

我が国でも，電磁気の教科書は数多出版されてきたが，なかなか現代の研究につながる著作は見当たらなかった．しかし，今世紀に入って太田浩一の厳密かつ野心的な3部の著作『電磁気学の基礎 I・II』，『マクスウェル理論の基礎』，『マクスウェルの渦 アインシュタインの時計』[3]が現れ革新された観がある．内容はこの順にレベルが高くなる．最初の著作は，大学初年級でも読める内容だが，オリジナルな部分も含まれており，程度は高い[*2]．

*1) 朝永振一郎，シュヴィンガー（J.S. Schwinger）と共に受賞．

2. 3つのキーワード

電磁気に**場**の概念を持ちこんだのは，ファラデー（M. Faraday）である．彼は電気力線で**電場**を，磁力線で**磁場**を表した[4]．電荷・電流の源の近傍の空間に緊張状態が発生していることを場で述べたのである．その考えを数学的に定式化したのはマクスウェル（J.C. Maxwell）である[5]．(1) 電場に関するガウス（Gauss）の法則，(2) アンペール（Ampère）–マクスウェルの法則[*3]，(3) 磁場に関するガウスの法則，(4) ファラデーの電磁誘導の法則の4つをまとめてマクスウェルの方程式と呼び，我々は原子のレベルから，宇宙のスケールまで成り立っていることを知っている．現今の教科書で述べられている以下の4つの微分形に書いたのはヘヴィサイド（O. Heaviside）とヘルツ（H. Hertz）である．マクスウェルはスカラーポテン

*2) 電磁気学の教科書を読むとき，気をつけなければならないのは，単位系である．パーセルは cgs-gauss 系，ファインマンと太田のは SI 系である．量子力学の代表的な教科書は cgs-gauss 系であり，量子電磁気学では，自然単位系（$c=\hbar=1$ とするヘヴィサイド単位系）を使っている．この小文は SI 系を用いる．

*3) マクスウェルは電流がまわりに磁場を作る法則をアンペールの法則と呼び，さらに下線を引いた項を変位電流と呼んで付け加えた．

シャルとベクトルポテンシャルも用いて，基本方程式を複雑に書いたが，この小文ではポテンシャルに触れる余裕はない．また，誘電体および磁性体に触れる余裕もないので割愛せざるを得ない．

真空中に**電荷密度**ρ, **電流密度** $\boldsymbol{J}$ が存在するとき

$$\begin{cases} \oint_{S=\partial V} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{a} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dv, & (1) \\ \oint_{C=\partial S} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 \int_S \left[\boldsymbol{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right]\cdot d\boldsymbol{a}, & (2) \\ \oint_{S=\partial V} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{a} = 0, & (3) \\ \oint_{C=\partial S} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{a} & (4) \end{cases}$$

の積分形の方程式が成立する*4)．ここで，電場を $\boldsymbol{E}$，磁場*5)を $\boldsymbol{B}$ と書く．積分に関するガウスの定理とストークスの定理を使って，次の 4 つの偏微分方程式を導くことができる．

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, & (1') \\ \nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}, & (2') \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, & (3') \\ \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}. & (4') \end{cases}$$

また，電荷密度と電流密度の間には，**電荷の保存則**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0 \qquad (5)$$

が成立する．

マクスウェルが光速度で伝わる電磁波を予言し，光も電磁波の一種であることを理論的に証明した後，1888 年に，ヘルツが電磁波を測定して，その予言の正しさを実験的に立証した[7]．光の波動説では，光波伝播の媒質をエーテル（Aether, Ether）と呼んできたので，電磁波もエーテルを媒質とする波動と考えられていた．エーテルの存在を確かめる実験は多数行われてきたが，検出できなかったため，19 世紀末には電磁波および光波の伝搬が大きな謎になっていた．そんな中で，アインシュタイン（A. Einstein）が 1905 年にエーテルを不要とする特殊相対性理論（**相対論**と以下では略称する）の論文を書き[6]，この謎を解いてしまった．今では誰もエーテルが存在するとは思っていない．相対論は，どんな慣性系から眺めても，電気力学の法則および光学の法則は全く同じであるということと，光は真空中を，光源の運動状態に無関係な，一つの定まった速さ c をもって伝搬するということを根本的な要請とする，この論文は，この要請を実現する**ローレンツ変換**が，電気力学でも基礎になっていると指摘し，エーテルは不要であることを明らかにした．相対論によって，電場と磁場の変換性が明らかになり，初めてマクスウェルの方程式の意義が明確になった．このことを再確認するのが，以下の目的である．

3. 電荷・電流

電荷をもった物質が**電磁場**の源となる．実験室に密閉容器を用意し，電気量を測定すると，容器内の電荷が求められる．しばらくして，また電気量を測定したとき，電気量が減っていれば，容器から電荷が**電流**として漏れてしまったことがわかる．電流が容器に流れ込めば，箱内の電気量は増える．電流の大きさは容器中の電荷の電気量の時間変化率（時間微分）で表される．これを電荷の保存則と言う．この法則を電荷密度，電流密度で表せば，(5) 式になる．電荷の保存則は，微視的，巨視的を問わず，あらゆる過程で成立している基本的な物理法則である．

ところで，単独で存在する粒子の電荷は電子の電荷の絶対値である e の整数倍しか知られていない．これを**電荷の量子化**と言うが，理由は不明である*6)．電子や陽子の発見以前に完成されたマクスウェルの電磁気学では，電荷の値は任意に想定できるとされていた．実際，電場の定義では，無限小の電荷を想定している．

閉電流を源とする磁場は，遠方では，閉電流の

*4) ここで真空の透磁率を $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{NA^{-2}}$ と定義し，真空の誘電率 ϵ_0 は真空中の光速度 c から $\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$ と定められる量である．

*5) **磁束密度**と呼ぶ教科書が多い．

*6) この量子化の説明は大統一理論か単磁極（磁石の N 極あるいは S 極のみ）がもし存在すれば，この量子化が説明可能であるというディラック（P.A.M. Dirac）による理論以外にない．しかし，これまでに単磁極は見つかっていない．

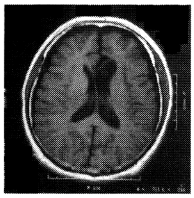


図1　脳の MRI 画像.

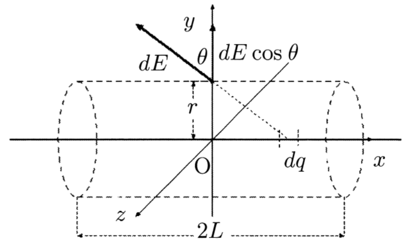


図2　微小電荷が作る微小電場およびガウスの法則の積分形を適用する円柱面を示した図.

大きさとそれを取り囲む面積の積で定められる**磁気モーメント**で書いてしまうことができる．原子や原子核，電子のような量子力学的対象でも，そのスピンや軌道角運動量から磁気モーメントが計算でき，磁気モーメントは磁場を作る源となる．外部から磁場をかけると，磁気モーメントは回転運動を始める．この運動を利用すれば，物質の構造分析を，物質を破壊することなく行うことができる．その一例が，パーセル等が発見した核磁気共鳴（NMR）現象[1]で，MRI という医療技術にも応用されている．図 1 に脳の MRI 画像の例を掲げておこう．

4. 電場・磁場

点 P における電場 $\boldsymbol{E}$ は，P に置かれた非常に小さい電気量 q_0 の点電荷が受ける力 $\boldsymbol{F}$ により，P の位置を $\boldsymbol{r}$ として

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

で定義される．単位は V/m = N/(A·s) である．このとき q_0 を置いても，$\boldsymbol{F}$ を及ぼしている他の帯電物体の配置を変えることがないくらい q_0 は微小であり，他の帯電物体に比べ質量は小さいものとしなければならない．

電気量 q の点電荷が原点にあるときのクーロン場 $\boldsymbol{E}$ は

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

となる．複数の電荷が作る電場は，それぞれが単独で作る電場の**重ね合わせ**（ベクトルの総和）である．

図 2 のように x 軸上の直線に一様線密度 λ で電荷が分布しているときの電場は線上の**微小電荷** $dq = \lambda dx$ が作る**微小電場** $dE\cos\theta$ の重ね合わせとして $E = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$ と求めることができる．同じ結果を，マクスウェルの方程式の一つである電場に関するガウスの法則の積分形 (1) を中心軸が x 軸上の半径 r の円柱面 S に対して使って

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{a} = 4\pi rLE(r) = \int_{-L}^{L}\frac{\lambda}{\epsilon_0}dx$$

より

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

として得ることもできる．

磁場 $\boldsymbol{B}$ は，q_0 が点 P で速度 $\boldsymbol{v}$ で動いているとき，及ぼされる力

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q_0\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$$

によって定義される．単位は T = N/(A·m) である．ここで，$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ は，$\boldsymbol{v}$ を方向が φ だけ異なる $\boldsymbol{B}$ に重ねるとき，右ネジの進む方向をもち，大きさが $vB\sin\varphi$ のベクトルとして定義されるベクトルである．

図 3 のように，x 軸の負の向きに電流 I が流れているとき，x 軸から r だけ離れている点での磁場 $\boldsymbol{B}$ の向きは，電流の流れる向きをネジの進む向きと考えて，右ネジを回す向きとなる．またその大きさが，

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

となることは，アンペール–マクスウェルの法則の積分形 (2) を，x 軸と直交する面上の（中心が x 軸上にある）半径 r の円周を C として適用すると，得られる[5]．この結果，$\boldsymbol{v}$ で動いている正電荷粒子には，図 3 の $\boldsymbol{F}$ という方向の力が働いている．

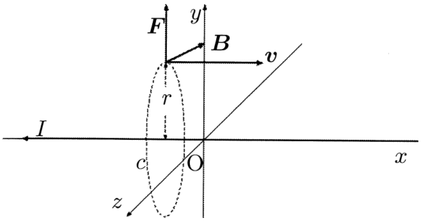


図 3　アンペール–マクスウェルの法則の積分形を適用する円周を示した図.

5. ローレンツ変換

ここで，必要な**ローレンツ変換の公式**を書いておこう[6]．“私” から見て x 方向に速さ v で動いている K' 系の物理量を $'$ 付き記号で表す．ただし，$\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ と置く．

時空座標 (t, x, y, z) の変換則

$$x' = \gamma(x - vt),$$
$$y' = y,$$
$$z' = z,$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right).$$

この変換則から，K' 系の x' 軸上に置かれている物差を “私” が見ると縮んで見えるというローレンツ・フィッツジェラルド収縮や，動いている時計は静止している時計より遅れてしまうという，有名な相対論的効果を導くことができる[6]．

速度の変換則　物体を “私” が見たとき，速度 $\boldsymbol{u}$ で動いていた．K' 系の人は，この物体は速度 $\boldsymbol{u}'$ で動いていたと言った．このとき，時空座標の変換則を使って，速度の変換則を得る．

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2},$$
$$u'_y = u_y/\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right),$$
$$u'_z = u_z/\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right).$$

この変換則から，光速度一定という相対論の要請も満たされていることがわかる．

相対論的力学では，質点の “質量” もその速度 $\boldsymbol{u}$ に依存し，静止質量 m_0 により $m(u) = \gamma m_0$ と定義される．電荷は，“質量” とは異なり，ローレンツ変換によっても変わらない不変量である[1]．これは，非常に重要なことで，実験的にも確かめられている．

質点の運動量 $\boldsymbol{p}$ およびエネルギー E は，“質量”$m(u)$ を用いて次のように定義される．

$$E = m(u)c^2,$$
$$\boldsymbol{p} = m(u)\boldsymbol{u}.$$

運動量 (p_x, p_y, p_z) とエネルギー E の変換則

$$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{v}{c^2}E\right),$$
$$p'_y = p_y,$$
$$p'_z = p_z,$$
$$E' = \gamma(E - vp_x).$$

力の変換則　質点の運動量の時間変化が，その質点に働く力であるというニュートンの運動方程式について考えよう．

“私” の K 系では $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$，$\mathrm{K}'$ 系では $\frac{d\boldsymbol{p}'}{dt} = \boldsymbol{F}'$ である．

初め静止していた質点（“質量” は静止質量 m_0）に極めて短い時間 Δt に力が働くとき，力の変換則を得ることができる[1,6]．その間，力は一定であり，運動量の変化は Δt に比例するが，質点の位置の変化およびエネルギーの変化は Δt の 2 乗に比例するので，無視できる．このとき，以下の力の変換則が成り立つ．

$$\frac{dp'_x}{dt'} = F'_x = \frac{dp_x}{dt} = F_x,$$
$$\frac{dp'_y}{dt'} = F'_y = \frac{1}{\gamma}\frac{dp_y}{dt} = \frac{1}{\gamma}F_y,$$
$$\frac{dp'_z}{dt'} = F'_z = \frac{1}{\gamma}\frac{dp_z}{dt} = \frac{1}{\gamma}F_z.$$

もちろん，電場，磁場は点電荷 q_0 に働くローレンツ力 $q_0[\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}]$ により定義されているので，この変換則から，電磁場の変換則も導かれる．

6. 電場と磁場の変換の具体例

図 3 で示した磁場は速度 $\boldsymbol{v}$ で運動している点電荷に働く力を測定して得られる場の量であった．点電荷とともに動いている K' 系で，静止している点電荷に働いている力を測定している人には，電

表 1　K 系と K′ 系での荷電粒子の速度と線密度.

系	q_0 の速度	伝導電子の速度	正イオンの速度	伝導電子の線密度	正イオンの線密度	導線の線密度
K	$(v,0,0)$	$(u,0,0)$	$(0,0,0)$	$-\lambda$	λ	0
K′	$(0,0,0)$	$\left(\frac{u-v}{1-uv/c^2},0,0\right)$	$(-v,0,0)$	$-\gamma\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)\lambda$	$\gamma\lambda$	$\frac{\gamma uv\lambda}{c^2}$

場による力しか認められないので，この人の実験ノートには，電場 $\boldsymbol{E}'$ しか書かれていない．“私” の実験ノートには，磁場 $\boldsymbol{B}$ しか書かれていない．この食い違いの解決には，相対論で用いられるローレンツ変換が必要であることと，導線を流れる電流および導線を形成する金属の構造についての正しい理解も不可欠であることを以下に示したい．

導線として，銅の線を考えよう．導線中の銅の最外殻電子の一つが伝導電子となり，自由に動くことができる．伝導電子を失った銅原子は Cu^+ イオンとして格子状に結合し，金属の固体構造を作っている．この正イオンはほぼ静止している．導線の両端に電池をつなぎ，回路を作ると，各伝導電子が金属内に印加された電場により，電池の陽極に向かって平均の速さ u の集団運動を行う（図 4）．これが電流の正体である．今，導線は真直ぐ直線状に長くのびているとする．導線内の正イオンによる電荷線密度を λ と表すと，伝導電子の線密度は $-\lambda$ となる．電流は $I=\lambda u$ であって，図 3 の磁場 $\boldsymbol{B}$ を作るのはすでに見た．

K 系からローレンツ変換によって K′ 系に移れば，K′ 系の様子がわかる．ローレンツ変換の結果をまとめて表 1 に示そう．表 1 から，K 系の q_0 は電場を感じないが，K′ 系で観測する静止点電荷 q_0 に働く力は，線密度が $\gamma uv\lambda/c^2$ の帯電直線が

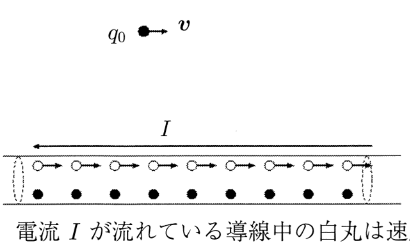


図 4　電流 I が流れている導線中の白丸は速度 $\boldsymbol{u}$ で動く電子，黒丸は静止している正イオンを表し，導線の外の黒丸は速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている正の点電荷 q_0 を表す．

作る電場 $\boldsymbol{E}'$ が与え，y' 成分しかもたない．

$$\boldsymbol{E}' = \left(0, \frac{\mu_0\gamma uv\lambda}{2\pi r}, 0\right),$$

$$F'_y = q_0E'_y = \frac{\mu_0\gamma uv\lambda}{2\pi r}q_0.$$

点電荷 q_0 の静止系 K′ から見ると，“私” の K 系は $-x'$ 方向に v なる速さで動いていることに注意して，$F_y = F'_y/\gamma$ を用いる．K 系で観測する q_0 に働く力は，$I=\lambda u$ であるから

$$\boldsymbol{F} = \left(0, \frac{\mu_0 q_0 vI}{2\pi r}, 0\right)$$

となる．

q_0 に働くローレンツ力 $\boldsymbol{F} = q_0[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}]$ とこの結果を比べれば，z 方向の単位ベクトルを $\hat{\boldsymbol{z}}$ としてアンペール–マクスウェルの法則の結果と確かに一致し

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{z}}$$

となる．よって，二人の実験ノートの食い違いは見掛け上のものに過ぎない．

7. 電磁場のローレンツ変換則

ここでは，K 系から見て，x 方向に限らず，任意の方向に速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている系への電磁場の**ローレンツ変換則**[6)] を与えておこう[*7)]．ただし，$\boldsymbol{v}$ と平行な成分を，添字 $_{\parallel}$ で，直交する成分を $_{\perp}$ と書くことにする．

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel},$$

$$B'_{\parallel} = B_{\parallel},$$

$$\boldsymbol{E}'_{\perp} = \gamma\left(\boldsymbol{E}_{\perp} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_{\perp}\right),$$

$$\boldsymbol{B}'_{\perp} = \gamma\left(\boldsymbol{B}_{\perp} - \boldsymbol{v}\times\frac{\boldsymbol{E}_{\perp}}{c^2}\right).$$

*7)　この表式も，平行平面極板コンデンサーを充電する仕事や，コイルの逆起電力に逆らって，電流を流しつづけるために必要な仕事を計算して確かめることができる．

8. 電磁波

マクスウェルは変位電流として付け加えた項から，真空中を光速で伝播する電磁波の存在を予言した．彼の死後，ヘルツが，火花放電により，電磁波の存在を実証した[7]．TVや携帯電話がこれほど普及したのも，マクスウェルとヘルツのおかげである．荷電粒子が加速度運動を行うと，電磁波が発生する．いったん発生した電磁波は，自由空間（電荷も電流も存在しない真空中）を光速度で伝播する．マクスウェルの4つの偏微分方程式から数学公式 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{G}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{G}) - \nabla^2\boldsymbol{G}$ を $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ に用いれば，速さ c で伝播する周期 $T = \lambda/c$ の波動方程式を得ることができる．

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\nabla^2\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0.$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = (0, E_0, 0)\sin\left[\dfrac{2\pi}{\lambda}(x-ct)\right], \\ \boldsymbol{B} = \left(0, 0, \dfrac{E_0}{c}\right)\sin\left[\dfrac{2\pi}{\lambda}(x-ct)\right] \end{cases}$$

は x 方向に進む波動の特解である．この解は，進行方向と直交する向きに振動する横波で，電場と磁場も互いに直交している解となっている*8)．

9. 電磁波によるエネルギー伝播

電磁場自体がエネルギー U をもつ．真空中に存在する電磁場のエネルギー密度 dU/dV は次式で与えられる*9)．

$$\frac{dU}{dV} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

上述の特解を代入してみよう．

$$\frac{dU}{dV} = \epsilon_0 E_0^2 \sin^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)\right].$$

このエネルギー密度は周期 $T = \lambda/2c$ で振動しているので，時間平均を考えると

$$\overline{\frac{dU}{dV}} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\frac{dU}{dV}dt = \epsilon_0\left(\frac{E_0}{\sqrt{2}}\right)^2$$

を結果として得る．

ペンジアス（A.A. Penzias）とウィルソン（R.W. Wilson）はアンテナの特性を測定している際に，あらゆる方向から，特定の強度分布をもつ電磁波がきていることを偶然発見し，1965年に発表した．これが，ビッグバンの名残の3Kの宇宙背景輻射の発見である[8]．電磁波の平均エネルギー密度は $4\times10^{-14}\,\mathrm{J/m^3}$ である．この輻射を，波長が決まった上述の平面波であると強引に仮定すると，この値に対応する電場の振幅の実効値 $E_0/\sqrt{2}$ が $0.06\,\mathrm{V/m}$ となる．

*8) 横波としての性質は，平面波の特解に限らず一般に成立する性質である．

*9) この表式も，平行平面極板コンデンサーを充電する仕事や，コイルの逆起電力に逆らって，電流を流しつづけるために必要な仕事を計算して確かめることができる．

参考文献

1) E.M. Purcell: "Electricity and Magnetism, 2nd ed".,"Berkeley Physics Course, Vol.**2**", McGraw-Hill (1984).

2) R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands: "*The Feynman* Lectures on Physics, Vol.**II**", "Mainly Electromagnetism and Matter", Addison-Wesley (1964).

3) 太田浩一：『電磁気学の基礎 I・II』，シュプリンガー・ジャパン (2007);『マクスウェル理論の基礎』，東京大学出版会 (2002);『マクスウェルの渦 アインシュタインの時計』，東京大学出版会 (2005).

4) ファラディー：『電気実験（下）』田中豊助監修，内田老鶴圃新社（この訳書ではファラディーの原著の *line of inductive force* を感応力線と訳している）.

5) J.C. Maxwell: "A Treatise on Electricity and Magnetism, 3rd ed"., Dover/Oxford Univ. Press(1891)（1871年初版刊行当時の日本ではネジが使われていないことが脚注に書かれている．機械工学の専門家によるとネジが我が国で広く使われるようになったのは大正以降であるそうだ．また，トムソン（J.J. Thomson）が付けた第3版の脚注は志田林三郎の光速度測定についての1880年の論文引用がある）.

6) A. Einstein: *Ann. Phys.* **17** (1905) 891; 邦訳 アインシュタイン：『相対性理論』内山龍雄訳・解説，岩波文庫（"私" というのは解説中に用いられている）.

7) H. Hertz: *Wiedmanns Annalen* **34**, (1888), 551 und ibid 610.

8) A.A. Penzias and R.W. Wilson: *Astrophysical Journal* **142**, (1965) 419; 我が国での先駆的研究として1951年頃の田中春夫等（名大）と赤羽（旧姓青木）賢司等の観測がある（大師堂経明氏に感謝する）．田中春夫等，空電研究報告 2 (1951) 121；赤羽賢司，『間違いだらけの物理概念』，丸善.

（ちかしげ・ゆういち，成蹊大学理工学部）

流れを見る物理

ゆく河の流れは絶えずして

生 井 澤　寛

1. 流れを見てみよう

サブタイトルは，鴨長明の「方丈記」の冒頭であり，以下に，「しかも，もとの水にあらず．淀みに浮かぶうたかたは，かつ消えかつ結びて，久しくとどまりたる例しなし．世の中にある人と栖（すみか）と，またかくのごとし」，と続く．人の身と所在のはかなさを流れの中の泡（うたかた）の生成消滅に例えたものである．流れを見る文学の典型的な例としてこの一節をあげたが，流れを見る人の思いは様々である．

ここでは，流れを見る物理の考え方の基礎を，ごくかいつまんで見てゆこう．

2. 流れを物理でどう見るか

流れの観察に基づいて，どういう量を物理の対象にするかを探ってゆこう．

2.1 流れを観察してみよう

流れを川と限って観察しよう．観察の仕方には，二通りが考えられる（図 1）．

まず鴨長明のように，方丈（一丈四方，畳四畳半ほどの広さ）の庵から，川の流れを観察してみよう（色々な場所の固定カメラで観察）．川と限っても，上流と下流では，流れの様子は大変異なる．

下流では，ゆったりと流れ，速度は，場所によるが，総じて小さい．流れの様子は，時間的に見ても安定して定常的なものになる．くいなどの障害物があれば，流れは乱れ，時には渦ができることもあるが，激しい乱れや不安定さは生じない．

一方上流では，山の傾斜を下る流れは速いし，波立ったり激しく乱れたりする．長明の見たようによどみではおそくなり，泡ができたり消えたりする．岩などの障害物があると，流れは不安定になり，砕け散ったり，渦ができたりもする．落差があれば滝となって，まとまった流れの形は失われ，水塊や，水滴さらには霧となって落ちる．

つぎに，木の葉や水の中のごみなどの小さい浮遊物を追って観察してみよう（小型潜水艇などの移動カメラで観察）．いわば，流れに身を任せて観察するのである．上流では，浮遊物は速く激しく複雑に動くが，下流では，ゆっくりと安定した道筋に沿って進むように見える．

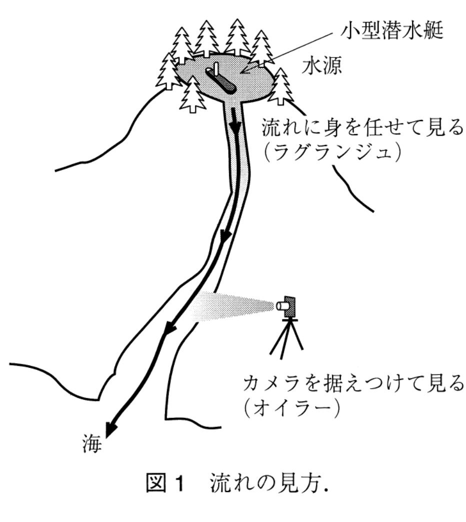


図 1　流れの見方.

いずれの見方をとっても，流れの**速度**が注目すべき物理量であることは確かであろう．前者のように，流れの決まった点に注目する観察（**オイラー的見方**と呼ぼう）では，速度は，注目する点と時間で変化する．場所と時間による物理量を，**場**と呼ぶが，速度は**速度場**として捉えられていたことになる．

一方，後者のように，流れの一部を追う見方（**ラグランジュ的見方**と呼ぼう）は，力学で物体を追跡するニュートンの方法と基本的には同じである．注目する流れの部分について，速度の他に，位置も含めて時間的にたどることになる．

では，速度の他に流れを記述する物理量は何か．そもそも流れとは何かを，考えて行こう．

2.2 水は方円の器に従う

物質は，水で見るように，温度，圧力などの条件により，固体（氷），液体（水），気体（水蒸気）の3つの姿（**相**という）をとる（図2）．このうち固体は自分の形を持つが，液体と気体は，固有の形は持たず，閉じ込めるためには容器がいる（水は方円の器に従う）．このおかげで液体と気体は流れるのであり，まとめて**流体**と呼ばれる．

2.2.1 砂遊びで学ぶ

では，流体は，なぜ固有の形を持たないのか．この問いを解く手がかりは砂遊びにある．砂場でも海岸でもよいが，砂でダンゴを作ったことを思い出そう．そのとき，砂が乾いているとすぐ崩れてしまう．砂も固有の形を持たない．さらに，乾いた砂で高い山を作ろうとすると，山の斜面の砂が崩れて流れ，ある傾き以上の斜面は作れない．では，砂も流体なのか．

この問いに挑戦するために，もう少し砂遊びをしよう．読者も，以下の処方に従って，ぜひ実験をしてみよう．乾燥した粒が揃った砂を使うとよい．

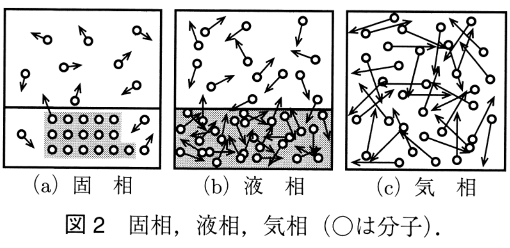


図2　固相，液相，気相（○は分子）．

実験1）菓子箱のふたなどに砂を盛って，山を作ろう．山ができたら，箱を振動させ，どうなるかを見よう．形の違う容器も試そう．

実験2）砂と一緒に，砂粒より大きいもの（鉄の玉，小石，ピンポン玉など）を数個，透明なコップあるいはビンに入れる．容器を振動させ，入れたものがどう動くかを見よう．表面を含め，入れる深さを変えること．

実験1）の結果，振動が加わるにつれ，山は崩れ，やがて砂は箱全体に広がり，平らになった．箱の形を変えると，その形に応じて平らになった．砂も方円の器に従う！

実験2）の結果，振動すると，入れたもののうち重い鉄は沈んでいったが，軽いピンポン玉は，次第に上昇し，やがて砂の面の上に浮いた．ゆすれば砂も，水や一般の流体と同じく浮力をもたらす！

両方の実験で，砂も流体の様相を示すことがわかった．共通するのは，振動による砂粒の運動である．実験1）では，砂粒が動いて，全体で水平面を形作る配置，すなわち重力エネルギーが最も小さい配置に落ち着いた．実験2）では，異物に砂粒が衝突して運動量を与え，砂粒の運動が圧力と同じ効果を生み出して，浮力となった．この実験は，いわばアルキメデスの原理の機構が，砂粒の運動による衝突であることを示したものといえよう．砂丘の斜面を下る流砂も，風による波模様（風紋）も，砂粒の運動の結果である．

2.3 分子から連続体へ

固体の砂粒の集まりである砂が，状況によって，流体のように振る舞うことを見た．ところで，流体に限らず私たちの身の回りにある物質では，砂と違って，構成要素は普通は目に見えない．目に見えないが，私たちは，あまたの実験的証拠や理論的考察から，物質が，原子・分子（以下に分子と略）からなることを知っている．このことが流体や砂に対してどういう意味を持つかを考えよう．

2.3.1 分子は小さく，物質中に無数にある

今では，日用品にも応用されるナノテクノロジーの，ナノメートル (nm) は，長さの単位で，10^{-9} m であり，日常の尺度に比べれば，一億分の一程度と大変小さい．分子は nm のスケールだから，**ミクロ**な存在であり，目に見える大きさ（**マクロ**）の物質中には，無数の分子がある．水 18 cc 中なら，**アヴォガドロ数**（1 モルの分子数 $= N_{\mathrm{A}} \approx 6.0 \times 10^{23}$）程度の水分子がある．

氷のような固体は，分子間の力によって通常結晶となるが，結晶格子の間隔（格子間隔*1)）a に比べて十分大きい距離で見れば，一様で連続的に見える．マクロの尺度で見るとき，物質は，**連続体**，と呼ばれる．砂も，砂丘や砂漠のように，砂粒よりずっと大きい尺度で見れば，連続体とみなせる．**固体は，格子間隔より長い尺度で見れば，連続体とみなすことができる．連続体としての固体中のある点の物理量は，その点の周りに，格子間隔よりは十分大きいが，系全体の差し渡し L_s に比べればずっと小さい半径 ℓ_1 $(L_s \gg \ell_1 \gg a)$ の領域をとって，そこでの平均値で代表させる（固体の連続体極限）**．この領域には，無数の分子があるから，平均はよい代表値を与える．

砂を含めた固体については，連続体とみなせる条件がはっきりした．では流体ではどうか．

2.3.2 流体中の分子は動き回り，衝突する

物質の温度（**絶対温度**）が T K のとき，分子は 1 個あたり $\frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T$ の平均の運動エネルギーを持つ．ここに，$R \approx 2\,\mathrm{cal/mol} \approx 8.4\,\mathrm{J/mol}$ を気体定数とすると，$k_{\mathrm{B}} = \frac{R}{N_{\mathrm{A}}} \approx 1.4 \times 10^{-23}$ J/K（**ボルツマン定数**）である．この運動エネルギーは，固体の場合は，安定点の周りに分子を振動（**熱振動**）させるだけだが，液体や気体では，分子を運動させる（**熱運動**）．熱運動の平均速度の大きさ $\bar{u}$ は，分子の質量が m なら，

$$\frac{1}{2}m\bar{u}^2 = \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T \rightarrow \bar{u} = \sqrt{\frac{3k_{\mathrm{B}}T}{m}}$$

となる．水の場合，常温で平均速度は，秒速約 600 m

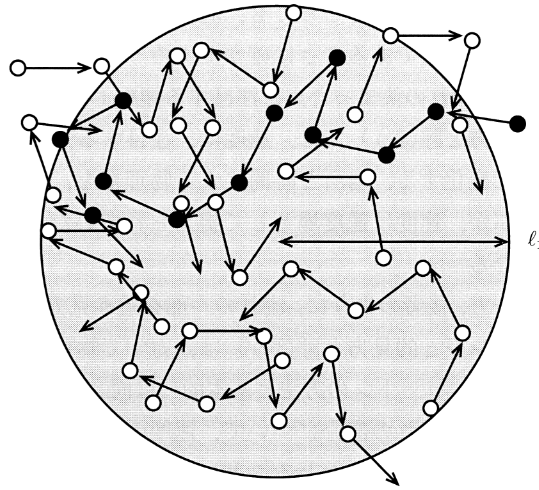


図 3　流体中の分子の運動を観察する．

と，大変大きい．分子は小さいだけでなく，早く動き回るのである．その間に，他の分子のごく近くに達すると，強い斥力を受けて跳ね飛ばされる．この衝突は，**弾性衝突**と見てよいから，エネルギーも運動量も保存される．液体や気体では，分子間相互作用のエネルギーは，平均運動エネルギーに比べて無視できるから，衝突と次の衝突の間で，分子は慣性の法則により，直進するとみなせる．ある分子に注目して，衝突と次の衝突の間の時間の平均値を**平均衝突時間**（t_0），衝突の間の距離の平均値を**平均自由行程**（ℓ_0）と呼ぼう．流体中に，系全体の大きさ L_s よりは小さいが，ℓ_0 より十分大きい半径 ℓ_1 の球を考え，全体の観測時間 T_s よりは短いが，t_0 より十分長い時間 t_1，球の内外の分子の挙動を観察しよう（図 3）．

観察時間は十分長いので，分子は衝突を繰り返し，球を出入りするものもあるが，出た分子と入った分子の数は等しい．また，球の中の分子の位置や速度の分布も，初めと終わりで，全体としてみると差はない（熱平衡状態とみなせる）．物理量は，球内での平均値と観察時間についての平均値を取れば，決まった値に落ち着くと考えられる．球の中心を $\boldsymbol{r}$，その体積を $\delta V(\boldsymbol{r})$，考える時刻を t とし，分子の物理量に分子番号 i の添え字を付けよう．例えば，速度ベクトルの平均値は，以下のように求められる[1]：

---

*1)　分子の大きさの数倍程度．

$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) = \lim_{t_1/T_s \to 0} \lim_{\ell_1/L_s \to 0}$
$[t_1^{-1} \int_{t-t_1/2}^{t+t_1/2} dt' (\sum_{i \in \delta V(\boldsymbol{r})} \boldsymbol{v}_i)|_{t'} / (\sum_{i \in \delta V(\boldsymbol{r})} 1)|_{t'}].$

ここに $\lim_{t_1/T_s \to 0}, \lim_{\ell_1/L_s \to 0}$ は $L_s \gg \ell_1 \gg \ell_0$, $T_s \gg t_1 \gg t_0$ を保った極限で, **流体の連続体極限**を意味する. また $(\sum_{i \in \delta V(\boldsymbol{r})} 1)|_{t'}$ は, 体積 $\delta V(\boldsymbol{r})$ の中の時刻 t' における分子数である. この平均速度には, 熱運動の速度は現れないことに注意しよう. 熱運動では, 分子の運動は等方的だから, 平均すれば消え, 流れがあれば, 流速だけが残るのである. 速度にならって, 平均密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ の表式を分子の立場から導いてみよう.

他の物理量についても同様の平均値を取ればよい. こうして, 連続体の立場では, 分子の挙動などのミクロな詳細には立ち入らず, 2.3.1 節と 2.3.2 節で述べたような平均操作を取った物理量を扱う. これは, 熱力学とほとんど同じ立場であり, 密度や圧力など, 両者で共通の物理量も多い.

2.3.3 流体とは何か

密度が判れば, 流体に働く共通の力の一つである重力が判る. 体積 δV に働く重力の大きさは, 重力加速度を g とすれば, $\rho \delta V g$ となる. 流体にあまねく働くもう一つの力である圧力についても, 分子の立場で考えることができる. 詳しくは, 文献 1) の §9 を見てもらうことにして, 要点を述べると, 圧力の起源は, 分子の運動にある. 流体は静止しているとし, その中に, 前の 2.3.2 節にならって, 半径 $\ell_1 (L_s \gg \ell_1 \gg \ell_0)$ の円板を考えよう. 分子は, この円板と完全弾性衝突するとし, 衝突する分子によって円板が得る運動量変化率 (時間 $t_1 (T_s \gg t_1 \gg t_0)$ についての) を求め, この円板について連続体極限を取れば, 平均の力が判り, 円の面積で割れば, 圧力が求められるのである. 実験 2) の振動する砂粒による浮力も同様の起源による. ここで,「圧力 (静止圧) は, 面に垂直である」, ことに注意しよう (圧力=面の法線方向応力[*2)]). 実は, このことこそが, **流体の定義**を与えるのである. **流体とは, 静止状態において, 接線応力 (面に沿う力) が存在せず, 法線応力として, 張力でなく, 圧力だけが存在する連続体である**[*3)]. なぜなら, 流体に接線応力があれば, 流体は面を滑ってしまって静止できないし, 応力が張力であったら, 流体は面を境に裂けてしまうからである. これで静止流体が自分の形を持たず, 水が方円の器に従う理由もはっきりした.

*2) 応力は, 単位面積あたりの力で, 単位は $\mathrm{N/m^2 = Pa}$.

3. 流れをどう記述するか

流体の正体が判ったから, 流れとその中の物体の運動をどう記述するかを見よう. ただしここでは, 運動方程式を求めたり解くことは文献 1) にまかせて, 流れを運動としてどう捉えるかの基本に触れるだけにしよう.

3.1 流体が動くか, 物体が動くか

2.1 節で流れを観察するのに, 流れの各点で場として見るか (オイラー), 流れに沿ってみるか (ラグランジュ) の二つの見方を挙げた. いずれにせよ私たちは, 流体の中の位置 $\boldsymbol{r}$ と時間 t を扱うから, 空間の座標系と時計を仮定している[*4)]. 通常は, 観測者がいる系を座標系にとる (静止系と呼び Σ と表す) が, 流速がほぼ一定な流体を扱うときは, 静止系に対し一定の速度 $\boldsymbol{u}$ で平行移動する座標系 (Σ' と表す) をとると便利である. 時刻 $t=0$ で, Σ, Σ' の原点が一致していたとし, 注目する点を P と呼ぶ. 時刻 t で, P の Σ での座標を $\boldsymbol{r}$ とする. このとき, Σ' の原点 O′ は, Σ で見ると, $\boldsymbol{u}t$ に達するから, 点 P の Σ' における座標を $\boldsymbol{r}'$ とすると, 二つの座標は,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{u}t, \quad \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{u}t$$

の関係で結ばれている (図 4). この座標変換を**ガリレイ変換**という. 加速度は, ガリレイ変換で変わらない $\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2}\right)$ から, 摩擦など, 速度に依存する力がなければ, 質点に対するニュートンの運動方程式は, ガリレイ変換で同じ形を保つ. Σ と Σ'

*3) 厳密には, さらに熱の出入りがない (断熱的) ことを要求することもある.

*4) 天体などで起こる高温・高速のプラズマなどを別にすれば, 普通に見る流体では, 流速は, 光速よりずっと小さいから, 相対論の効果は考えなくてよく, 時間も単一でよい.

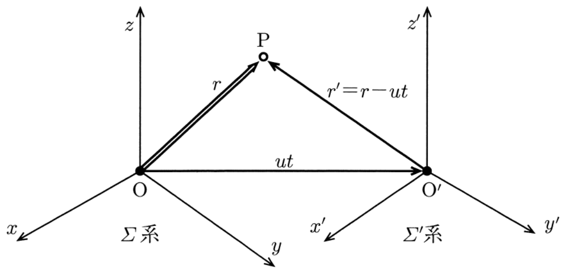


図 4　ガリレイ変換.

のように，相対的に等速直線運動する系*5)で，運動方程式が不変となることを，**ガリレイ不変性**，または**ガリレイ相対性**という.

流体の運動方程式も，連続体に対するニュートン力学の応用だから，ガリレイ相対性が成り立つ．飛行機や自動車を設計するときに用いる風洞実験や船舶の設計に用いる水槽実験などでは，設計の対象は止まっていて，空気や水が流れるが，この状況が，空気や水は止まっていて，飛行機が飛んだり，船が航行する実際の状況に対応するとみなせるのは，ガリレイ相対性のおかげである．流体の理解には，ガリレイ相対性の考えが欠かせない.

3.2 よく似た流れ

冬，西高東低の気圧配置がはっきりしているとき，気象衛星の画像に，アジア大陸や日本の脊梁山脈の風下にかけて，雲の渦が長くつながる様子を見ることができる．実験で見てみよう.

実験 3) 平らで大きめの容器（バットなど）に水を入れ，練り歯磨きを，薄い霧がかっかた程度に良く溶かし込む．水に溶ける色素（墨汁，インクなど）を，綿棒の先にたっぷり付け，容器の水面に綿の部分を半分程度浸して，一定の速さでまっすぐ動かして観察しよう．動かす速さを変えること.

実験すると，綿棒の後ろに渦の列が並ぶ（この渦を，**カルマン渦**という）．速く動かすと渦も多くできるが，あまり速いと乱れてしまい，渦の様子がはっきりしなくなった．いずれにせよ，気象に見られる大規模な大気の流れの模様と，容器の水にできる流れの模様（ガリレイ相対性から，綿棒が静止で，水が流れると考えて良いことを思い出そう）とが，良く似ていることが判った.

では，どういうときに，流れが似ているといえるのだろうか．この疑問にきっちり答えるには，粘性抵抗を入れた流体の運動方程式について知らなくてはならないが，ここには，要点だけを述べる.

まず，運動方程式に現れる慣性項（ニュートン方程式では，質量×加速度＝運動量の時間微分）について考える．ニュートンの考え方の延長であるラグランジュの見方を取ろう．2.3 節で見たとおり，流体は，連続体としたから，位置 $\boldsymbol{r}$ で考える体積要素 dV や面素 $d\boldsymbol{S}$，時刻 t で考える微小時間 dt などは，連続体極限で許される大きさとする．ラグランジュの見方では，流れに乗って運動を追跡するから，考える体積要素の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$，速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$，加速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{v}}$ などは，時間の関数である：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}.$$

ところで，流体内の物理量は，速度場で見たように，場であり，$\boldsymbol{r}, t$ の関数である．このために，例えば，スカラー場 $F = F(\boldsymbol{r}, t)$ については，時間変化 $\frac{\partial F}{\partial t}$ の他に，空間変化（勾配）$\mathrm{grad}F = \nabla F = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$ も考えなければならない．ラグランジュ流に見たとき，場の時間変化はどう表せるか．時刻 t で位置 $\boldsymbol{r}$ にあって，速度 $\boldsymbol{v}$ で動く体積要素は，時刻 $t + dt$ では，位置 $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}dt$ に移動するから，スカラー場の値は $F(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}dt, t + dt)$ に変わる．この間の変化量 $dF = F(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}dt, t + dt) - F(\boldsymbol{r}, t)$ を，時間変化 dt で表そう．時間だけの関数では，$df = f(t + dt) - f(t) = \frac{df}{dt}dt$，位置の関数では，

$$\begin{aligned} dg &= g(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}) - g(\boldsymbol{r}) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz \\ &= \nabla g \cdot d\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

に注意すると，

$$\begin{aligned} dF &= F(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}dt, t + dt) - F(\boldsymbol{r}, t + dt) \\ &\quad + F(\boldsymbol{r}, t + dt) - F(\boldsymbol{r}, t) \\ &= \nabla F \cdot \boldsymbol{v}dt + \frac{\partial F}{\partial t}dt \end{aligned}$$

*5)　等速直線運動では，力は働かず，慣性の法則が成り立つので，これらの系を，**慣性系**と呼ぶ.

となる．これより，流れの中の場の時間微分は，

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla F$$

となって，時間微分の他に，流れの速度と場の勾配の内積が現れる．この微分全体を**全微分**と呼ぼう．記号では，$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla$ と表される．

準備が済んだから，流体の運動方程式の慣性項を求めよう．位置 $\boldsymbol{r}$ での流速を $\boldsymbol{v}$，密度を ρ とすると，$\boldsymbol{r}$ の周りの体積要素の質量は ρdV だから，運動量 $\rho \boldsymbol{v} dV$ の全時間変化は，以下となる：

$$\frac{D(\rho \boldsymbol{v} dV)}{Dt} = \left[\frac{\partial(\rho \boldsymbol{v})}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla(\rho \boldsymbol{v})\right] dV$$
$$= \left[\boldsymbol{v}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla\rho)\boldsymbol{v} + \rho(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}\right] dV.$$

慣性項が判ったから，力について考えよう．似た例として挙げた気象衛星と実験 3）の渦列で，すぐ気が付く違いは，流れの中の障害物の大きさの違いである．気象の場合は高い山や島など大規模だが，実験 3）では，綿棒などで小さい．流体中で物体に働く力を見るために，実験をしよう．

実験 4）蜂蜜に，箸ないしはスプーンなどを立てて，一定の速さでまっすぐ動かしてみて，箸などの周りの蜂蜜の動きを観察し，動かすときの力の大きさを感じ取ろう．速さを変えてみること．

実験してみると，蜂蜜は，箸のごく近くでは箸にくっついて動くが，箸から離れるにつれ，動きは次第にゆっくりになり，遠くでは全く動かない．また，速いときほど，蜂蜜の動きも速くなり，箸を動かすための力も大きいと感じた．

この実験でまず判ることは，物体と流れの間に相対運動があるときには，流れに沿う方向（接線方向）に抵抗力が生ずることである．流れが静止しているときは，面に垂直な圧力だけだったのが，流れがあると，流れに沿う力（接線応力）が生まれ，物体からの距離で，流れの速さに違い（速度勾配）が出る．言い換えると，流れに垂直な方向の流速に勾配があると，抵抗力が生ずる．流速の勾配に

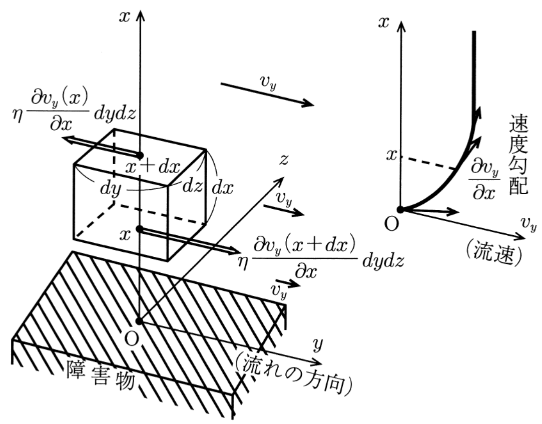


図 5　粘性による力．

よる力を**粘性力**という*6)．いま，流れは y 方向とし，流れに垂直な速度勾配のある方向を x，(x,y) 面に垂直な方向を z とする．流れと接する物体面上に原点を取り，x 軸の 2 点 $x, x+dx$ を垂直に切る微小な 2 つの長方形（辺の長さ dy, dz，面積 $dS = dydz$）を考える（図 5）．

ニュートンによれば，勾配が小さいとき，接線応力は，勾配に比例する．今の場合，速度勾配は $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ だから，応力 $T_y(x)$ は y の負の方向に働き，

$$T_y(x) = -\eta\frac{\partial v_y(x)}{\partial x}$$

となる（**ニュートンの粘性法則**）．比例係数 η（エータと読む）を**粘性係数**という*7)．図 5 の直方体の流れに沿う二つの面での粘性による力は，上面で，$T_y(x+dx)dS = -\eta\frac{\partial v_y(x+dx)}{\partial x}dS$ であり，下面では，接線応力がずり応力だから符号が変わって，$-T_y(x)dS = \eta\frac{\partial v_y(x)}{\partial x}dS$ となる．これより，直方体の体積要素 $dV = dxdydz = dxdS$ に作用する正味の粘性力 F_y は，以下で与えられる*8)：

$$F_y = (T_y(x+dx)dS - T_y(x))dS = -\eta\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}dV.$$

密度変化は小さい（縮まない）とし，流れは定常的だとすると，慣性項で重要なのは最後の項だ

*6)　粘性のミクロな起源は，圧力の場合と同様，流体中の面を通しての運動量交換である．文献 1) §11 参照．

*7)　単位は，　$\mathrm{Pa\,sec} = \mathrm{N\,sec/m^2}$．

*8)　この体積要素に働く重力は $-\rho g\hat{g}dV$，圧力は $-\nabla p dV$ である．ただし，$\hat{g}$ は鉛直上方の方向ベクトルである．

けである．圧力変化も高度差も小さいとして良いから力は粘性力だけでよく，体積要素で割ると運動方程式の重要な部分は，

$$\frac{D(\boldsymbol{v})}{Dt}=\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\bar{\eta}\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

となる．ここに，$\bar{\eta}=\eta/\rho$ は**動粘性係数**（単位は，$\mathrm{m}^2/\mathrm{sec}$）という．物体から離れた所の流速を U，考える範囲（物体の差し渡しなど）の長さを L とすると，速度勾配は U/L の程度だから，慣性項と粘性項の大きさの比は，

$$\frac{\text{慣性項}}{\text{粘性項}}=\frac{L^{-1}U^2}{\eta L^{-2}U}=\frac{LU}{\bar{\eta}}=R$$

の程度である．この比は無次元数で，**レイノルズ数**と呼ばれる．長さを L，時間を L/U，速度を U で測ると，流体の運動方程式には，レイノルズ数しか現れない（示してみよう）．**幾何学的に相似な系で R が同じなら，流れは相似的となる（レイノルズの相似則）**．これが，大気の渦列と実験3）の渦列が似ている理由である．風洞実験などで，模型を使う際にも，レイノルズ数が同程度になるようにすれば，実物に近い流れが再現できる．

3.3 渦はなぜ消えにくいか

実験3）の渦列をよく見ると，渦は交互に反対回りの対になってできる．静かに流れる川の中のくいの後ろにも，渦の対ができるが，いったんできるとなかなか消えない．これは，コマを回すとなかなか倒れないことに似ている．コマのときは，力学の角運動量の保存則のおかげで，外力も，摩擦や空気の抵抗もなければ，いつまでも回り続ける．角運動量の保存則は，いわば，回転に関する慣性の法則である．ここでは立ち入らないが，流体の場合にも，同様の保存則が成り立ち，**粘性がなければ，渦は回り続ける（ケルビンの渦定理）**（文献1）§10参照）．一様な渦のない流れに，くいなどの障害物によって，互いに相手を打ち消し合う逆回転の渦対が生ずるのも，渦定理のためである．実際の流体中で，渦がやがて消えるのは，粘性による．

渦は，なぜ飛行機が揚力を受けて飛ぶかにも関わっている．ガリレイ相対性によって，飛行機の静止系に移れば，空気の流れの中で考えることができる．このとき，翼の周りに図6のような渦があると，上向きの揚力が生ずる（文献1）§11参照）．

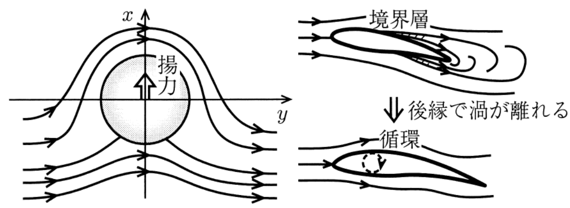


図6　物体の周りの流れと揚力．

では，初めは一様であった流れに，なぜ片方回りの渦ができるのだろう．図5で見たように，粘性のせいで，物体のごく近くの速度勾配が大きい層の中に，沢山の小さい渦が生ずる（この層を，**境界層**と呼ぶ）．物体の形を工夫すると，境界層は，物体の後ろ側から剥がれて*9)大きな渦となり，やがて物体から離れ去る．このため，物体の後方の流れは滑らかになってゆく．ところで，もともと流れには渦はなかったのだから，物体の周りには，逆回りの渦（正確には循環という量）*10)が取り残されて，図6のように揚力を生むのである．飛行機の場合なら，翼を滑らかな形にし，後ろ端を薄くしたり，角度を変えたりすることで揚力を大きくすることができる．

境界層の剥がれのために，物体は接線抵抗だけでなく，流れ方向の抵抗力も受ける．この抵抗を減らすには，流れに対して緩やかなふくらみを持つ形（流線型）を選べばよい．こうすると境界層の範囲と厚さが減り，渦も減り，剥がれる位置も後退して，抗力が減るのである．

4. 量子的な流体

これまでに見てきた流体は，基本的には，ニュートン力学の範疇にあった．粘性のせいで，流れも渦もだんだん弱まるし，ごく細いと管を通り抜け

*9)　これがカルマン渦のできるきっかけとなる．飛行雲にもカルマン渦が見られる．

*10)　循環は，速度を閉曲線の周りに積分したもの（循環 $=\oint \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}$）．

ることもできない．

しかし，流体の中には，温度が下がると，粘性や抵抗が消えて，流れも渦も減衰せず，細い管も通り抜ける**超流動状態**になる物質がある．液体ヘリウムと超伝導物質がそうであり，これらは**超流動体**といわれる．

ではなぜ，超低温になると，これらの物質で粘性や抵抗が消えるのだろうか．これは，実は，**量子性**による．量子とは，ミクロの世界の基本原理で，原子・分子，さらには物質のでき方や，電子・素粒子などの振舞いを支配している物理の論理であり[2]，力学，電磁気学などの古典物理学とは異なる論理体系である（この特集の和田氏の稿「量子力学」も参照）．例えば，光のエネルギーは，古典電磁気学では，振幅の二乗に比例して連続的に変われるが，量子の世界では，振動数が ν なら，$h\nu$ の整数倍の値しか取れない（$h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,sec}$ は，**プランク定数**）．量子物理は，ミクロ世界の物理の基礎で，日常の常識が通用しないところが多いので，理解するのは楽ではない．しかし，その応用面は，日常生活に広く深く関わっている．ハイテクの基礎をなす半導体やナノテクノロジーは，量子物理無しには，生まれも成長もしなかっただろう．

さて，光に限らず振動数 ν の量子的状態は，エネルギー（単位）$h\nu$ を持つ．2.3.2 節で見たとおり，温度 T の熱運動による平均エネルギーは $k_{\mathrm{B}}T$ 程度だから，$h\nu > k_{\mathrm{B}}T$ なら，熱運動では，この量子状態は励起できない．このため，温度が下がると，熱で励起される量子状態がどんどん減ってしまい，絶対零度ではゼロエネルギーの状態しか存在できない*11)．通常の物質にとって絶対零度の近くは，いわば死の世界なのである．しかし，ヘリウム 4 は，質量が小さく，原子間相互作用も弱いので，絶対零度でも液体のままである．その上，任意の数の原子が同じ状態にいられるという性質を持つ（ボース粒子という）ので，絶対零度の近くでは，^{4}He 原子が，運動量もエネルギーもゼロの状態にどんどん落ち込んでいく．これが，**ボース凝縮**である．凝縮状態は最低エネルギー（基底）状態であり，ゼロ運動量の量子状態は，**ド・ブロイの関係**（**波長＝ $h/$ 運動量**）から，無限の広がりを持つから，凝縮した原子どうしが重なり合って，強い相関を持つ*12)．このため，少々の刺激では励起状態に移れず，粘性や摩擦が生じないので，超流動状態になるのである．超流動状態が始まる**転移温度**以下の有限温度では，ゼロ運動量の凝縮原子と有限運動量の原子が混ざっているので，前者は粘性のない超流動流体，後者は粘性を示す通常の流体（常流動体）として振る舞う（二流体系）．

^{3}He や電子は，単独ではボース粒子ではない（これらは，ともにフェルミ粒子であり，一つの運動量状態に，スピン角運動量*13) が逆向きの 2 個まで入れる）が，相互作用によって，運動量とスピンが逆向きの対を作ってボース粒子となり，ゼロエネルギー・ゼロ運動量状態に**対凝縮**するので，^{4}He 同様，超流動性を示すのである．

超流動体で渦はどう振る舞うのだろうか．前に 3.3 節で渦は，角運動量にあたることを見た．古典力学の角運動量は，回転の強さを表す量で，回転半径に運動量をかけた量であり，連続的に変われる．一方，量子の世界では，角運動量（プランク定数と同じ単位を持つ．確認しよう）も量子化され，通常の回転では，$\hbar = h/2\pi$ の整数倍に限られる*13)．超流動体でも渦は量子化され，対応する角運動量は，やはり $\hbar$ の整数倍となる*14)．量子化された渦は，実験的に見つけられ，超流動体が**量子流体**であることの直接の証拠となった．

*11） 零点振動という隠れた振動は別とする．文献 2) 参照．

*12） 系全体の凝縮状態を表す量子的関数（基底状態の波動関数）も，マクロに広がっている．

*13） スピン角運動量は，相対論的量で，回転角運動量ではないが，$\hbar$ の整数倍だけでなく，半整数倍にもなれる．^{3}He と電子のスピン角運動量の大きさは $\hbar/2$ である．

*14） 渦の強さを表す渦度が，凝縮体の質量を m とすると，$\hbar/m$ の整数倍に量子化される．

参考文献

1) 生井澤　寛：『キーポイント連続体力学』，岩波書店 (1995).

2) 生井澤　寛，小形　正男：『量子物理』，放送大学教育振興会 (2009).

（なまいざわ・ひろし，放送大学教養学部）

熱と物性

田中　文彦

1. はじめに

我々が力学，電磁気学や量子力学に惹かれるのは，それらが壮大な体系として完成されており，基本法則は少数の方程式に集約されていて適用性が保証されているからである．いわば，問題に応じて解決の出発点がすでに準備されているのである．熱力学の魅力はこれらとは少し異なる．温度，熱，平衡，可逆・非可逆，エントロピーなどの熱力学の中心概念は，日常目にふれる多くの身近な現象に直結しているにも関わらず，完全な理解を容易に許さない．熱力学の基本3法則はほとんど形式的なもので，その実質は方程式に表現し難い内容になっている．3法則を知っていても問題解決と結びつけるのは容易ではないのである．本稿では熱力学の諸概念の形成過程を振り返りながら，**熱**，**エントロピー**，**ソフトマター**を3つのキーワードにとりあげ，ソフトマターの代表格である高分子にエントロピーの概念がどのように適用され，その物性に対してどのような予測力があるかを概観する．

2. 熱

熱の概念が温度の概念から分化したのは，ブラック（J. Black）による比熱と潜熱の発見（1760年頃）以後である．比熱は2物体の熱的接触において高温物体から低温物体に「熱素」が移動するという，容器間の水の移動のアナロジーにより理解されたので，熱は実体物質として存在するものと考えられていた．氷の融解時に伴う潜熱の発見は，熱を物体に流入させても温度は一定に保たれるという事実から，温度と熱が異なる概念であるという確証になった．熱の概念の導入された当初から熱と相転移「物性」とが結びついていたのである．

その後，ラムフォード（B.J. Rumford）により大砲の発砲時に発生する摩擦熱の研究がなされ，仕事の熱への転化現象を説明するために「熱＝運動」説が台頭した（1798年）．熱と仕事との等価性の証明は，インド洋を航海していた船医マイヤーの発見に始まる．マイヤーは船員の放血手術において船が熱帯に入ってから放血される静脈血が著しく赤みを増していることから，熱帯では体温と外気の温度差が小さく，体温を一定に保つために体内で発生すべき熱量は少なくて済み，その分だけ酸素の消費量が少なく静脈血に酸素が残り赤みを帯びるというインスピレーションを得た．彼は栄養物の酸化は熱の源泉だけでなく同時に筋肉労働の源泉でもあるのであるから，熱と仕事とが関係づけられると考えた（1840年）[1)]．

熱と仕事との互換性を定量的に実証したのはジュール（J.P. Joule）である．ジュールは電磁誘導によりコイルに流された電流の発熱量の測定（1843年）によりジュールの法則を証明した後，熱を力学的動力と絶対的な数値的関係で結びつける試みとして1845年から1849年にかけて粘性流体を攪

拌して発生する摩擦熱の測定を執拗に繰り返した．その結果，系の内部に存在するエネルギー（**内部エネルギー**）の同一量の変化を，力学的な仕事のみで引き起こす場合と熱の流入のみで引き起こす場合とを比較することによって，熱量 Q を仕事量で測ることができることを示した．1gの水を1気圧の下で，14.5°Cから15.5°Cに上昇させるのに必要な熱量を1 cal（カロリー）と呼ぶことにすると，ジュールの発見した熱–仕事変換の普遍定数は，今日の数値で書くと

$$1\,\mathrm{cal} = 4.18605\,\mathrm{J} \tag{1}$$

となる．この値を**熱の仕事当量**と言う．すなわち，熱と仕事とは，エネルギーという共通の物理量が異なった形態を取ったものとみることができるのである．

ここで，熱力学的測定の対象は以下の3つの範疇に分けられることを復習しておこう[2)]．一般に観測の対象となる多数の粒子から構成された巨視的物体を**系**と呼ぶ．系の構成粒子としては，原子，分子や，電子，陽子，中性子，光子などの素粒子が考えられる．観測者が興味の対象としている系以外の部分を**外界**（あるいは環境体）と言う．系が外界と全く交渉を持たないとき，この系を**孤立系**と言う．系が外界から力学的（機械的）な作用を受けたり，両者の間に熱の出入りがあるときには，この系を**閉じた系**と言う．また，このとき力学的作用を及ぼす外界を**仕事源**，熱的交渉のある外界を**熱源**と言う．これらの交渉に加えて，系と外界との間に物質の出入りも生じるときには，この系を**開いた系**，物質を授受する外界を**物質源**と言う．

閉じた系の任意の微小な状態変化（無限小過程）について，その過程で外界から系に入った熱量を $d'Q$，外界が系にした仕事量を $d'W$ とすると，仕事と熱の等価性と，エネルギーの保存則により内部エネルギーの変化は

$$dU = d'Q + d'W \tag{2}$$

の関係が成立する．熱量や仕事量は Q や W の微分ではなく，単に微小な量であることを明示するため $d'Q, d'W$ と記した．仕事量と熱量とを合わせたものは途中の変化の仕方によらないで，系の内部エネルギー U の変化 dU に等しい．これが熱力学第一法則の数学的な表現である．

3. エントロピー

閉じた系の状態変化が外界と常に熱平衡状態を保ちつつゆっくりと起こる場合，その変化は**準静的変化**と呼ばれる．エントロピー変化 dS は系の準静的無限小過程に対して

$$dS = \frac{d'Q}{T} \tag{3}$$

で定義される．ここで T は系の絶対温度，$d'Q$ は系に流入した熱量である．準静的過程なので変化は可逆であり，系の温度 T は外界の温度 T_{e} に等しい．このようにして導入されたエントロピー変化を系の基準状態（記号 α_0 で表す）から観測している状態（α）まで積分した量で求められるエントロピー

$$S(\alpha) \equiv \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d'Q}{T} \quad \text{（準静的過程）} \tag{4}$$

は，途中の過程によらず系の始状態と終状態のみで定まる状態量であり，dS は量 S の微分の意味をもつ．熱力学におけるエントロピーの概念はクラウジウス（R.J.E. Clausius）により定式化された（1866年）．

エントロピーの概念を使用すると，気体の準静的体積変化に対する第一法則は，圧力のする仕事 $-pdV$ を加えて

$$dU = TdS - pdV \tag{5}$$

と表される．ここで p は気体の圧力，dV は気体の体積 V の微小変化量である．同様に，張力による固体の準静的伸長に対する第一法則は，張力のする仕事 fdL をさらに加えて

$$dU = TdS - pdV + fdL \tag{6}$$

のように表される．ここで，f は張力，L は張力

をかけた方向の固体試料のサイズである．

準静的でない任意の無限小過程に対しては，準静的過程で定義された系のエントロピー変化 dS は $d'Q/T_{\mathrm{e}}$ に一致せず，不等式

$$\frac{d'Q}{T_{\mathrm{e}}} \le dS \tag{7}$$

を満たす．とくに，この過程が不可逆の場合には真の不等号が成立する．

ボルツマン（L. Boltzmann）はクラウジウスによりエントロピー概念が定式化された翌年（1867年）より，すでに気体分子運動論の視点からエントロピーを理解する試みを始めていた．1872年にはボルツマン方程式による分子運動の研究を通じて，いわゆる H-関数

$$H(t) \equiv \int d\boldsymbol{r} \int d\boldsymbol{v} f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) \ln f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) \tag{8}$$

を導入し，この関数が時間とともに単調に減少することを示した．ここで $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$ は時刻 t における気体分子の速度，位置に関する分布関数である．H-関数が最小値に到達したとき，気体は熱平衡状態に達し，$-kH$（k は定数）がエントロピーに対応する．気体分子の位置と速度を合わせて微視的な状態 i を指定するものと考えると，(8) は

$$H(t) \equiv \sum_i f_i(t) \ln f_i(t) \tag{9}$$

の形に一般化される．ここで f_i は全粒子 N 個の中で識別ラベル i で指定される状態をとっている粒子数 N_i の割合 $f_i \equiv N_i/N$ である．

ボルツマンはさらに熱平衡状態ではエントロピー $S = -kH$ が

$$S = k_B \ln \Omega \tag{10}$$

のような関係で系のミクロな状態数 Ω と結びついていることを示した．ここで Ω は与えられた巨視的な変数（エネルギー E や体積 V など）の下に系が取り得る可能な微視的状態の総数である．この関係式は**ボルツマンの原理**，この原理から得られるエントロピーは**統計エントロピー**と呼ばれる*1)．絶対0度では系のエネルギーは最低の状態（基底状態）にあり，基底状態は一意的に決まるので $\Omega = 1, S = 0$ となり，熱力学第三法則はボルツマンの原理の自然な帰結である．

エントロピー変化の重要な例として，N_{A} 個のA分子と N_{B} 個のB分子を混合して混合物（混合気体や溶液，固溶体）を得る場合のエントロピー変化 $\Delta_{\mathrm{mix}}S$ を求めよう．分子の体積は同程度と仮定する．ボルツマンの原理に現れる状態数 Ω を求めるために，空間を仮想的な $N = N_{\mathrm{A}} + N_{\mathrm{B}}$ 個のセルに仕切り，分子を各セルに収容することを考える．N_{A} 個のA分子をランダムに収容させる可能な方法の数は $\Omega = N!/N_{\mathrm{A}}!N_{\mathrm{B}}!$ 通りあり，それらのそれぞれに対してB分子は残ったセルに一意的に収容させることができるので，ボルツマンの原理 (10) を用いると混合エントロピーは

$$\Delta_{\mathrm{mix}}S = k_B \ln \frac{N!}{N_{\mathrm{A}}!N_{\mathrm{B}}!} \tag{11}$$

で与えられる．大きな数 N に対するスターリングの近似式

$$\ln N! \simeq N \ln N - N$$

を用いて近似値を求めると

$$\Delta_{\mathrm{mix}}S \simeq -Nk_B[x_{\mathrm{A}} \ln x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}} \ln x_{\mathrm{B}}] \tag{12}$$

となる．ここで $x_{\mathrm{A}} \equiv N_{\mathrm{A}}/N$, $x_{\mathrm{B}} \equiv N_{\mathrm{B}}/N$ はそれぞれの成分のモル分率である．これを，2成分系の**混合エントロピー**と言う．混合エントロピーは，状態数 Ω を N 個の粒子を状態Aと状態Bに分配する場合の数と考え，$f_{\mathrm{A}} \to x_{\mathrm{A}}$, $f_{\mathrm{B}} \to x_{\mathrm{B}}$ の読み替えを行うと定義 (9) から直接得られることに注意しよう．

*1) ボルツマンの原理に現れる定数 k_B は，もとは k と書かれている．また，状態数は慣例的に W と書かれるが，仕事量 W との混乱を避けるため Ω と記した．式 $S = k \log W$ はウイーン郊外のボルツマンの墓碑に刻まれているのであるが，ボルツマン自身の研究には現れず，この形に書いたのはプランクである．

4. ソフトマター
—ゴムは固体よりも気体に近い

ソフトマターとは我々の身の回りに存在する柔らかい物質のことで，具体的には高分子，ゴム，ゲル，界面活性剤，コロイド，液晶などのことをさし，これらで構成される生体物質も含まれる．分子性結晶，金属，セラミックスのようないわゆるハードマターに比べてソフトマター研究の歴史は浅く，多くは20世紀に入ってから本格的に研究が始まった．

ソフトマターの物性はエネルギーよりもエントロピーの効果で決まる場合が多い．例えば，ゴムの弾性は通常のハードマター固体の弾性と異なり，以下のような極だった特徴を有する．すなわち，(1) 弾性率が小さい（$10^{5\sim6}$ N m^{-2} くらいで，金属やガラスなどの数万分の 1 程度），(2) 高伸長，高復元性がある（数倍引き伸ばしても元に戻る），(3) 弾性率が温度に比例して大きくなる，(4) 断熱圧縮で温度が下がり，断熱伸長で温度が上がる．これらの一見して異常な性質は，ゴムの弾性が分子間の相互作用から生じるのではなく，ゴムを構成する高分子鎖の形態（**コンホメーション**と言う）の多様性によるエントロピーによって生じると考えると自然に説明ができるのである．

気体の膨張とゴムの伸長を比較することにより，ソフトマターにおけるエントロピーの役割を調べよう[2~4)]．図 1（上）のようにピストン付きの容器に入った理想気体を減圧して，一定温度 T の下でその体積が V_0 から V になるまで膨張させたとする．ボルツマンの原理 (10) に現れた状態数 Ω は気体分子の重心座標の可能な配置のさせ方の総数なので，これは気体の体積 V に比例する．従って気体のエントロピーは

$$\Delta S = Nk_B \ln \frac{V}{V_0} \qquad (13)$$

だけ増加する．理想気体では分子間に相互作用がないので，内部エネルギーは温度だけに依存する．すなわち，熱力学関係式 (5) において $dU = 0$ であるから，気体の圧力は

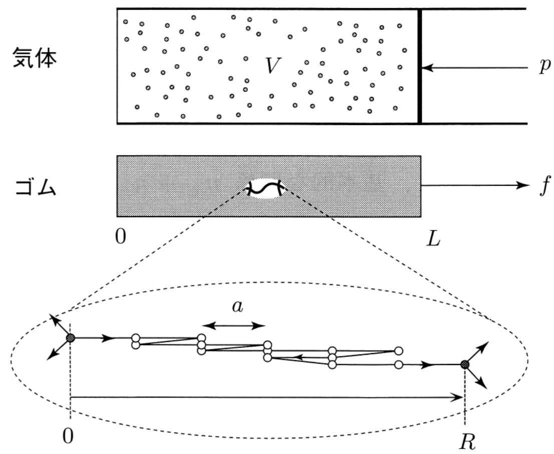


図 1　(上) 容器に閉じこめられた気体の等温膨張，(中) 棒状ゴム試料の一軸伸長，(下) ゴム試料中の架橋点間を結ぶ部分鎖のコンホメーション．

$$p = T\left(\frac{\partial \Delta S}{\partial V}\right)_T = \frac{Nk_BT}{V} \qquad (14)$$

となり，理想気体の**状態方程式**が得られる．エントロピーとエネルギー保存則から理想気体の物性である状態方程式が導かれた．

次に，1 辺が L_0 の立方体のゴム試料の x 方向に張力 f をかけ，x 方向の一辺の長さを自然長 L_0 から L に伸長する場合を考えよう（図 1 中）．比 $\lambda \equiv L/L_0$ を**伸長度**と言う．ゴムは伸長に際しては体積が一定（$dV = 0$）に保たれることが知られているので，伸長軸（x 軸）と垂直な y, z 方向には辺の長さが $1/\sqrt{\lambda}$ 倍だけ縮まる．

ゴムの内部では架橋された高分子がネットワーク構造を形成し，各高分子鎖はランダムな糸まり状の形態をとっている（**ランダム鎖**）．ランダム鎖は熱運動により多くのコンホメーションをとることができ，このコンホメーションの多様性による形態エントロピーが生じる．形態エントロピーを求めるため，ゴムの中のある架橋点から別の架橋点を結ぶ高分子の部分鎖に注目する（図 1 下）[3,4)]．

高分子はモノマー単位が共有結合で線状に連結した分子量の大きい分子である．簡単のため高分子を構成するモノマーを長さ a の棒状セグメントで表し，x 方向の 1 次元的なコンホメーションの

みを考察する．セグメントは結合点で自由に折れ曲がるものとする．

セグメントの総数を n，右向きのセグメントの数を n_+，左向きのものを n_-，末端間距離を R とすると，基本的な関係 $n_+ + n_- = n$，と $(n_+ - n_-)a = R$ から，両方向のボンド数は $n_\pm = (1 \pm x)/2$ となる．ここで $x \equiv R/na$ は全長 na に対する末端間距離 R の割合，すなわち1本の鎖に関する伸長度である．左右の向きのボンドはランダムに混合しているので，混合エントロピーに関する関係式 (12) を使うと，部分鎖に蓄えられているエントロピーは

$$S(R) = -nk_B \left[\frac{n_+}{n} \ln \frac{n_+}{n} + \frac{n_-}{n} \ln \frac{n_-}{n} \right]$$
$$= -\frac{nk_B}{2} \left[(1+x) \ln(1+x) + (1-x) \ln(1-x) \right] \tag{15}$$

となる．この結果から部分鎖の末端に作用している張力は，気体の場合と同様に (6) において $dV = dU = 0$ とおいて求められ

$$f = -T \left(\frac{\partial S}{\partial R} \right)_T = \frac{k_B T}{2a} \ln \frac{1+x}{1-x} \tag{16}$$

となる．無次元化した張力 $fa/k_B T$ を無次元化した伸長 $x = R/na$ に対してプロットすると図2のような形になる．

微小伸長領域（$x << 1$）では

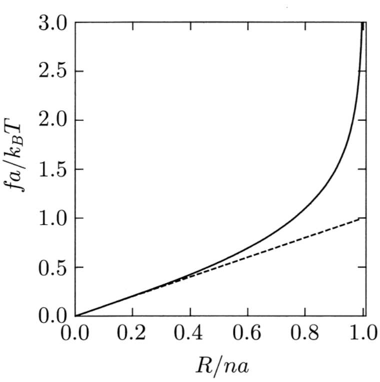


図2　高分子鎖の張力–伸長曲線（実線）．微小伸長領域では張力は伸長に比例し（点線）ガウス鎖の性質をもつが，高伸長領域では非線型伸びきり効果で張力の増加が著しい．

$$S(R) \simeq S_0 - \frac{k_B}{2na^2} R^2 \tag{17}$$

（$S_0 \equiv nk_B \ln 2$ は定数）のように末端間距離の2乗に比例して減少することがわかる．すなわち，伸長に伴って取り得るコンホメーションが制限され，鎖のエントロピーが減少するのである．

エントロピーの式 (10) に戻ると，末端間距離が R に指定されたときの状態数 $\Omega(R)$ は $\exp(-R^2/2na^2)$ に比例することになるので，鎖の末端間距離が R となる確率はこれを全状態数で割って規格化し

$$P_0(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi na^2}} \exp \left(-\frac{R^2}{2na^2} \right) \tag{18}$$

のようにガウス分布となることがわかる．このように末端間距離の確率分布がガウス分布になるような鎖を**ガウス鎖**と呼ぶ．ガウス鎖の平均2乗末端間距離は

$$\langle R^2 \rangle_0 = na^2 \tag{19}$$

である．

微小伸長領域では張力は末端間距離 R に比例し

$$f \simeq \frac{k_B T}{na^2} R \tag{20}$$

となるガウス鎖（線型バネ）の特徴が現れ，高伸長領域（$R/na \simeq 1$）ではガウス鎖から大きく上方にはずれる非線型の**伸びきり効果**が見られる．

ゴム試料の長さが λ 倍に伸長されているので，内部の鎖の末端間距離も λ 倍に伸長されるものと仮定すると，エントロピーは

$$\Delta S(\lambda) = S(\lambda R) - S(R) \simeq -\frac{k_B}{2na^2} (\lambda^2 - 1) R^2 \tag{21}$$

だけ変化する．外力がかかる前の状態では，ゴムの内部には様々な末端間距離を有する部分鎖が存在するので，最後の因子 R^2 をガウス鎖に関するその平均値 (19) で置き換えることにすると

$$\Delta S(\lambda) \simeq -\frac{k_B}{2} (\lambda^2 - 1). \tag{22}$$

実際には y, z 方向の縮小もエントロピー変化に

$-2\times\frac{k_B}{2}(\frac{1}{\lambda}-1)$ の形で寄与し，またゴム試料内の多くの部分鎖が張力に寄与するので，伸長による全エントロピー変化量は

$$\Delta S(\lambda)\simeq-\frac{\nu k_B}{2}\left(\lambda^2+\frac{2}{\lambda}-3\right) \qquad (23)$$

となる．ここで ν は張力に寄与する部分鎖の総数である．

全張力 f は (16) と同様の微分操作 $f = -T(\partial\Delta S(\lambda)/\partial(\lambda L_0))_T$ によって得られるので，これを実行すると

$$f=\frac{\nu k_BT}{L_0}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda^2}\right) \qquad (24)$$

となる．この張力を初期断面積 L_0^2 で割ると，応力（単位面積当たりの張力）σ が求まる．応力と伸長の関係は

$$\sigma=\frac{\nu k_BT}{L_0^3}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda^2}\right) \qquad (25)$$

となる．また，変形状態では断面積が L_0^2/λ になっているので，変形状態での単位面積当たりの張力 τ で表した応力–伸長曲線は

$$\tau=\frac{\nu k_BT}{L_0^3}\left(\lambda^2-\frac{1}{\lambda}\right) \qquad (26)$$

となる．ν/L_0^3 は単位体積中の部分鎖の数であるから，ゴムの重量密度 ρ と，部分鎖の分子量 M を使うと，$\nu/L_0^3=\rho N_{\mathrm{A}}/M$ のように実測が容易な量で表すことができる．すなわち，

$$\tau=\frac{\rho RT}{M}\left(\lambda^2-\frac{1}{\lambda}\right) \qquad (27)$$

である．

以上のように，部分鎖の伸長度が巨視的な変形量 λ に一致するという相似変形（**アフィン変形**と言う）の仮定をする理論を，**ゴム弾性の古典理論**，または**アフィンネットワーク理論**と言う．

典型的な物性量であるゴムのヤング率 E は張力をさらに微分して求められ，

$$E=\lambda\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda}\right)=\frac{\rho RT}{M}\left(\lambda+\frac{2}{\lambda^2}\right) \qquad (28)$$

の結果を得る．特に線型ヤング率は微小伸長で定義されるので $\lambda=1$ とおいて

$$E=\frac{3\rho k_BT}{M} \qquad (29)$$

となる．

例えば，$T=300\,\mathrm{K}$, $M=10^4$, $\rho=1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ では $\nu/L_0^3=10^{-4}\,\mathrm{mol\,cm^{-3}}$, $E=7.4\times10^6\,\mathrm{dyne\,cm^{-2}}=7.4\times10^5\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ となり，鉄のヤング率 $9\times10^{10}\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ の 10 万分の 1 程度である．鎖の熱運動が激しくなるほど部分鎖の張力が大きくなるから，このようにヤング率は温度に比例して大きくなるのである．

これらの結果は高温で柔らかくなる金属とは対照的である．金属では原子間のポテンシャルエネルギーにより，原子は規則的な位置に配列して結晶を構成している．昇温により原子の熱運動が激しくなり，変形を復元させようとする力が弱められるので，弾性率が小さくなる．しかし，ゴムでは伸長により鎖の配位エントロピーが減少するので，復元力が温度に比例して大きくなるのである．

アフィンネットワーク理論はゴム弾性の特徴をうまく説明するが，応力–伸長曲線を詳しく調べると実験結果からはずれることが知られている．実験では高伸長で張力の増大が著しい S 字型の曲線になるのに対し，理論では傾きが一定となる．これは高伸長領域では鎖が伸びきりの状態となり，どこまでも張力に比例して伸長するというガウス鎖の仮定が成立しなくなるからである．張力の S 字型特性は，このような鎖の**非線型伸びきり効果**を考慮することでうまく説明することができる．

ソフトマターの物性はエントロピーと深く結びついているのである．

参考文献

1) 高林武彦著『熱学史』第 2 版（海鳴社，1999）．
2) 田中文彦著『ソフトマターのための熱力学』（裳華房，2009）．
3) 久保亮五著『ゴム弾性』（裳華房，初版復刻版，1996）．
4) 田中文彦著『高分子の物理学』（裳華房，1994）．

（たなか・ふみひこ，京都大学大学院工学研究科）

統計物理って何？



吉岡　大二郎

1. マクロとミクロ，温度って何？

（一年生の力学の講義後，黒板の前で）

学生 S　あのう，先生には力学を教わっていますが，友達から先生は統計物理の本も書いていると伺いました[1)]．先生の専門は力学ではないのですか．

教授 P　大学の先生で今どき力学を専門にしている人はいないと思うよ．僕の専門は物性物理で，統計物理は物性物理研究の道具だよ．

S　実は統計物理の本を読んだんですけど，良く分からなかったので，統計物理ってどういうものなのか，聞いていいですか？

P　いいよ．熱平衡状態の統計物理学に限らせてもらうけどね．この統計物理というのは**ミクロ**と**マクロ**をつなぐ学問なんだ．ところで，ミクロとマクロって何のことか分かるかい？

S　ミクロな系というのは原子や分子の世界のことで，マクロな系というのは，僕たちが日常相手にする手に取ったり，重さを感じたりするもののことですよね．

P　そうだね．空気は手に取ったり，重さを感じたりはできないけど，1ℓ の空気なんていうのもマクロな系だ．10^{20} 個とか，10^{30} 個という膨大な数の原子や分子を含んでいる系だね．

さて，マクロな系をマクロな系として扱うのが**熱力学**だよね．熱力学ではマクロな状態量である，**圧力**，**温度**，**体積**，**エネルギー**などについて物質によらずに一般的に成り立つ相互の関係を調べたり，対象とする物質での関係式である**状態方程式**を議論したりする．熱力学では状態方程式は測定して求めるしかないけれども，一般的に成り立つことについてはとても強力な学問で，例えば熱力学の第 1 法則，第 2 法則を用いると，熱機関を動かすためには最低でも 2 つの熱源が必要であり，そのときの効率は作業物質としてボイル=シャルルの法則に従う理想気体を用いても，全然違う状態方程式に従うゴムを用いても，同じ上限になるということなんかが出てくることは知っているよね．でも，状態方程式を理論的に出すことができれば嬉しいんじゃないかい．

S　そうか，状態方程式などを物質がミクロな構成要素からできていることを用いて出すのが，今日説明してくれる統計物理学なんですね．それって，**理想気体**では簡単ですよね．確か，高校の物理で分子が壁に衝突して圧力が出る，それで理想気体の状態方程式が出せたように記憶してます．理想気体でなくても，原子や分子がお互いに力を及ぼしながら運動する様子をきちんと考慮すれば例えば普通の気体のファン=デル=ワールス状態方程式が出るのでしょうね．

P　ちょっと待った．物事はそんなに単純ではないよ．まず，マクロな系は例えば 10^{25} 位の原子・分子を含んだ系だから，相互作用があるときに個々の分子の運動を追いかけることはできないんだ．相互作用をしていない理想気体にしても，状

態方程式は出てこないよ．

S　あのう，前に物理の究極の理論である「万物の理論（theory of everything）」の研究が物理の最先端の研究テーマで，これで，物質の構成要素とその間の力が解明されれば，すべてが分かってしまうって聞いたんですけど，その理論ができなくても，原子分子の世界の法則である量子力学は確立しているので，理想気体の状態方程式みたいな簡単な式は出せるのではないんですか．

P　「万物の理論」はたとえ構築できてもそれだけでは理想気体の性質も説明できないし，永久磁石の理論も作れないよ．

S　え，「万物の理論」は万物を説明できないのですか．何が問題なんですか．

P　そこが，今日説明したいことの一つなんだよ．それじゃまず理想気体に，気体分子運動論を使ってみよう．**圧力**は気体分子の壁への衝突の結果だよね．単原子の理想気体では，内部エネルギーを E として，$PV = 2E/3$ という関係を導き出すことができるよね．でも，**温度** T をこの式に入れてボイル=シャルルの法則にするにはもう一段階必要で，それはミクロに考えるだけではダメなんだ．

S　ちょっと待って下さい．何でこれでダメなんですか．気体の温度は内部エネルギーに比例するって習いましたよ．温度って，単に分子の平均エネルギーを度で測ったものでしょ．

P　いやいや，温度とエネルギーは別の概念だよ．高校で理想気体しか教えないからそんなふうに理解している学生が結構いるんだけどね．コップに氷と水を入れておくと，0° C になってるよね．これにエネルギーを加えていっても，氷が全部溶けるまでは 0° C のままだろ．エネルギーが増えたって温度が上がるとは限らないよね．

S　なるほど．そうすると**温度って何**ですか．

P　そのことも含めて，ミクロとマクロをつなぐにはどうすれば良いのかこれから説明していこう．

実は，ミクロとマクロをつなぐには，ミクロな構成要素である原子や分子の運動が**分かっていることと，分からないことの両方が必要**なんだよ．

S　何か，禅問答のようですが．

P　まず，分からなければならないのは，ミクロにはどのような運動が可能かということで，あらゆる可能性が分かってなければならない．ここが，ミクロな運動法則の出番で，古典力学で調べても良い場合もあるが，本当は量子力学を使うべきだ．ちなみに「万物の理論」は必要ない．

次に分からないのは何か．それは，対象としているマクロな系が，それらの可能性のうち，どの状態にあるかということさ．統計物理学の大本になるのは「**等確率の原理**」だが，この原理では，マクロな系はミクロに可能な状態間を時々刻々移り変わっていき，**熱平衡状態**ではすべての可能な状態が全部同じ確率で実現すると主張する．一つのミクロな状態が実現しているときに，次の瞬間にどのように移り変わっていくのかは，万能の神様なら分かるかも知れないが，人間にもコンピュータにもそんなことはできない．でも，それを知らなくても等確率の原理を受け入れれば，ミクロとマクロをつなぐことができるんだよ．

S　ミクロに可能な状態がすべて等確率で実現すると言いましたが，中には変な状態もあるのではないですか．例えば，気体分子が全部箱の角に集まってしまうような．

P　そのとおり．ミクロに可能な状態はあらゆる奇妙な状態も含んでいる．しかし，統計物理学が成功を収めているのは，マクロな系ではミクロに可能な状態の数が**想像もできないくらいたくさんある**ためなんだ．そして，例えば気体であれば，そのうちのほぼすべてが，密度が一様な状態になっていて，変な状態は何百億年待っても実現しないくらい小さな確率でしか実現しないのさ．ちょうど宝くじを何枚買っても，はずれくじしか手に入らないようにね．

S　100 円くらいは当たったことはありますけどね．それで温度はどうなったんですか．

P　うむ，あらゆるミクロに可能な状態と言ったが，実はこれには拘束条件がついているんだ．というか，マクロな系はマクロな方法で制御できる．体積を決めたり，圧力を決めたり，断熱壁で

囲ってエネルギーを一定値に保ったりできる．これらが拘束条件で，この条件が許すミクロな状態だけが実現できる．

体積 V と，エネルギー E を決めた系を考えよう．このときに可能となるミクロな状態数を $\Omega(E,V)$ と書こう．これはめちゃめちゃに大きな数だ．特定の一つのミクロな状態が実現する確率は $1/\Omega(E,V)$ になる．この $\Omega(E,V)$ を使って，**エントロピー**を

$$S(E,V)=k_{\mathrm{B}}\log\Omega(E,V) \tag{1}$$

と定義する．これは，熱力学でのエントロピーと同じものであることが示せる．$k_{\mathrm{B}}=1.38\times10^{-23}\,\mathrm{J/K}$ はボルツマン定数だ．

S　この式って，確かボルツマンのお墓に彫ってあるって聞いたような．

P　そのとおり．ボルツマンが発見した美しい式だ．統計物理学での温度の逆数はこのエントロピーから

$$\frac{1}{T}=\frac{\partial S(E,V)}{\partial E} \tag{2}$$

と定義される．

S　これが温度というのは良く分かりませんが．

P　温度が持つべき大事な性質が2つある．一番大事なのは，2つの物体が熱平衡になっているときに，2つの物体の温度が等しいことだ．そして，第2の性質は，温度が高い物体と，低い物体が接触したときに，高温の物体から低温の物体にエネルギーが流れて，熱平衡に向かうことだ．この2つの性質さえ持てば，何を温度としても良い．エントロピーの微分で定義した温度は，この性質を持つんだ．そのことを説明しよう．

今，物体Aと物体Bが断熱壁で囲われた中で熱平衡状態にあって，全エネルギーを E としよう．統計物理ではこのとき，可能なすべてのミクロな状態が同確率で実現することを主張するんだよね．だから，エネルギーを全部Aが持っていて，Bのエネルギーがゼロというミクロな状態もありだ．でも，そういう3億円の当たりくじみたいなのは，滅多に手に入らない．観測したときに実現しているのは，いつもやたらに数が多いはずれくじ，つまり，一番確率が高い状態さ．

S　ちょっと待って下さい．一番確率が高い状態って何ですか？ 確率はみんな同じじゃないんですか．

P　ミクロな状態は全部同じ確率だけど，それらを分類するんだよ．宝くじなら，当たっている金額でグループ分けすると，最大のグループははずれくじだろ．今の場合は，Aの持っているエネルギーでグループ分けしてみよう．このエネルギーを E_{A} とすると，Bの持っているエネルギーは $E_{\mathrm{B}}=E-E_{\mathrm{A}}$ だ．このときの，Aのミクロな状態数はAのエントロピーを $S_{\mathrm{A}}(E)$ と書けば，$\Omega_{\mathrm{A}}=\exp[S_{\mathrm{A}}(E_{\mathrm{A}})/k_{\mathrm{B}}]$，同様に，$\Omega_{\mathrm{B}}=\exp[S_{\mathrm{B}}(E_{\mathrm{B}})/k_{\mathrm{B}}]$ なので，このグループ中のミクロな状態の総数は $\Omega_{\mathrm{A}}\times\Omega_{\mathrm{B}}=\exp[S_{\mathrm{A}}(E_{\mathrm{A}})/k_{\mathrm{B}}]\times\exp[S_{\mathrm{B}}(E-E_{\mathrm{A}})/k_{\mathrm{B}}]$ ということになる．そのときに，最大勢力のグループはどうなる？

S　そう聞かれても，エントロピーの詳細が分からないのに，無理ですよ．

P　無理じゃないんだ．関数の最大値は微分すれば求まるだろ．

S　えーと，それでは何で微分すれば良いかというと，E_{A} みたいですね．エントロピーを微分したのは温度で書けば良いのかな．

（学生は黒板で計算をしてみる）

あー，2つの物体の温度が等しいときに微分がゼロになるんだ．

P　そう．このときに，2つの系全体でミクロな状態の数が最大になる．AとBがマクロな系の場合には，このグループ中のミクロ状態数は，他のグループの状態数より圧倒的に大きくてほとんど常にこの状態が実現しているわけだ．

さて，この熱平衡でのエネルギーの配分を $E_{\mathrm{A}}^{(0)}$ と $E_{\mathrm{B}}^{(0)}=E-E_{\mathrm{A}}^{(0)}$ と書いておいて，初め，Aのエネルギーがこれより少なくて，Bのエネルギーは多かったとしよう．このエネルギー配分のときのミクロな状態数は平衡状態でのミクロ状態数よりずっと少ない．従って，このエネルギー配分のときの状態数を E_{A} で微分すると，正の値になる

はずだね．黒板に君が書いた式を見てごらん．このときAとBとどっちが温度が高い？

S　$\partial S_{\rm A}/\partial E_{\rm A}$ のほうが大きいのだから，温度が高いのはBです．

P　そうだよね．この状態でしばらく待つと，系は色々なミクロな状態間を経巡っていくけど，結局は実現確率最大のエネルギー分布だけが次々と出てくるようになる．すなわち熱平衡状態だ．このときにはBからAにエネルギーが流れ込んでいるわけだ．つまり，温度の第2の性質もOKだ．

S　なるほど．でも，この温度って，温度計で測っている普通の温度と同じなんですか？

P　同じものだよ．そのために，エントロピーの定義式にボルツマン定数が入っているのさ．理想気体でミクロな状態数を数えて，温度を求めると，絶対温度に等しいことが分かるけど，そのあたりは，教科書で勉強するんだね．僕の本[1)]は薄くて簡単に読めるから，統計物理の入門にはお勧めだよ．今日は次の講義が始まっちゃうので，終わりにしようか．

S　お疲れさまでした．

2. 自由エネルギーと状態方程式

S　先生，先週の続きをお願いします．

P　今日は熱力学でも統計物理でも重要な役割を持つ**自由エネルギー**を説明しよう．出発点は**ボルツマン因子**だ．この言葉は聞いたことあるかい？

S　ファインマンの教科書[2)]，初めの数ページで挫折してたんですが，先週もう一度開けてみたら，ボルツマン因子ありきで始まっていたので一応覚えてますが．えーと，エネルギーが低い状態が実現確率が高くて，式で表すと，

$$\text{確率} \propto \exp\left(-\frac{E}{k_{\rm B}T}\right) \qquad (3)$$

ですか．で，変だと思ったのですが，ミクロな状態の実現確率はすべて等しいはずだし，マクロな系の場合には，実現確率は状態数に比例するから，エントロピーとか，Ω とかで書けるのではなかったんですか．前回の話との関係がいまいち，どこ

ろか，全然分かりません．

P　いきなり名著に挑んで挫折したんだね．あの本は初心者向きではないからね．英語で読んだかい？

S　はい．先生が Feynman lectures[3]は英語で読むべきだと講義でおっしゃったので．

P　大学院に進学すれば教科書も論文も英語だから，今から原書に挑むのは良いことだよ．さて，ボルツマン因子は“状態”の実現確率を与える式で，前回説明した統計物理の大原理「等確率の原理」から導き出せるのだけど，問題は“状態”だ．これは熱力学でいうマクロな状態ではない．対象としている物体の，エネルギー E を持つ，ある“**一つのミクロな状態**”が温度 T の熱浴中で実現する相対確率を表す式なんだね．

S　エネルギーが違う状態は等確率では実現しないのですか？

P　そうだよ．物体が決まったエネルギー E を持つときに，実現可能な膨大な数のミクロな状態はすべて等確率で実現すると考えるのが，「等確率の原理」．でも，これはエネルギーが違う場合にどうなるかは主張していない．物体が温度 T の環境中にあって，色々なエネルギーを取り得るときに，違うエネルギーのミクロな状態間の確率を与えるのがボルツマン因子だ．

S　等確率の原理から導出できるとおっしゃいましたが，どんなふうに出すのですか？

P　対象とする物体 A と熱浴 B が全体として一定のエネルギー E_0 を持つ状況に等確率の原理を使えば良いんだ．このとき実現可能なすべてのミクロな状態の総数を Ω_0 としよう．従って，ある一つのミクロな状態の実現確率は $1/\Omega_0$ だ．A がエネルギー E_A を持つ一つのミクロな状態にある確率は，そのような状態が何個あるかで決まる．この状態が X 個あれば，確率は X/Ω_0 だ．ここまでは良いかね．

S　はい．

P　それでは問題．X はいくつか？

S　X は A がエネルギー E を持つ状態数だから，$\Omega_\mathrm{A} = \exp[S_\mathrm{A}(E_\mathrm{A})/k_\mathrm{B}]$ ですね．

P　ブ，ブー．はずれ．さっき言ったように，いま求めたい確率は A が一つのミクロな状態にある確率だよ．

S　それなら $X = 1$ ですね．

P　ブ，ブー．またまたはずれ．A と B 全体を見て，状態数を調べなければダメだ．A の状態は一つだけど，B にはたくさんミクロな状態があるじゃないか．落ち着いて考えてみなさい．

S　はい．そうすると，B のミクロな状態数は $\Omega_\mathrm{B} = \exp[S_\mathrm{B}(E_0 - E_\mathrm{A})/k_\mathrm{B}]$，A が 1 個で，B が Ω_B 個，この積つまり Ω_B が X ですね．

P　ピンポーン．さて，熱浴 B は定義によって A より圧倒的に大きいので，$E_0 \gg E_\mathrm{A}$ だよね．そこで，$S_\mathrm{B}(E_0 - E_\mathrm{A})$ を E でテイラー展開してみよう．

$$
\begin{aligned}
X &= \exp[S_\mathrm{B}(E_0 - E_\mathrm{A})/k_\mathrm{B}] \\
&= \exp\left(\frac{S_\mathrm{B}(E_0)}{k_\mathrm{B}} - \frac{E_\mathrm{A}}{k_\mathrm{B}}\frac{\partial S_\mathrm{B}}{\partial E_0}\right). \qquad (4)
\end{aligned}
$$

温度の定義式を用いて E_A に依存する部分だけ取り出すと，

$$
X \propto \exp\left(-\frac{E_\mathrm{A}}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{B}}\right). \qquad (5)
$$

これで，ボルツマン因子が導き出せた．

S　なるほど．E_A が大きい状態の実現確率が小さいのは，A がエネルギーを取ってしまうと，B のエネルギーが減って，B のミクロな状態数が少なくなるからなんですね．

P　その通り．ここで面白いのは，A は B より十分に小さければ良いので，1 個の原子や，分子でも良いことだ．気体分子に適用すると，**マクスウェルの速度分布**になるし，位置エネルギーも考慮すると，高山で空気が薄くなる様子も計算できるよ．

S　あとで富士山やエベレストでどうなるか計算してみます．

P　さて，ボルツマン因子は**ミクロな状態**の実現確率だったけど，今度は熱力学で取り扱う**マクロな状態**に話を移そう．ボルツマン因子で考えると，どんな状態が一番実現確率が高いかね？

S　エネルギーが低い状態です．

P　その通り．しかーし，熱浴中の物体が実現確率が最大であるはずの最低エネルギー状態にあることはない．なぜか？

S　？？？

P　熱力学ではミクロな情報は全く考慮しない．状態量であるエネルギー E が温度 T の熱浴中でどうなるかだけが問題なので，同じエネルギー E を持つ A のミクロな状態は全部ひっくるめて，同じグループとして取り扱う．このグループには $\Omega_{\mathrm{A}}(E)$ 個の状態が含まれている．この結果，A がエネルギー E を持つ確率は

$$\begin{aligned} \text{確率}\,(E) &\propto \Omega_{\mathrm{A}}(E)\exp\left(-\frac{E}{k_{\mathrm{B}}T}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{E-S(E)T}{k_{\mathrm{B}}T}\right) \qquad (6) \end{aligned}$$

と書ける．A が温度 T の熱浴中で持つエネルギー E はこの確率が最大となるエネルギー，つまり，$E-S(E)T$ を最小にするエネルギーだ．この最小値を $F(T)$ と書いて，**ヘルムホルツの自由エネルギー**と呼ぶ．体積 V も明記して式で書くと

$$F(T,V)=\min_{E}\left[E-S(E,V)T\right]. \qquad (7)$$

S　あー，この式って，内部エネルギーから自由エネルギーを出すときの**ルジャンドル変換**そのものじゃないですか．普通の教科書だと単に $F=U-ST$ がルジャンドル変換とか書いてあるけど，この $\min_E$ が大事だって S 先生の講義で聴きました[4)]．

P　えらい，熱力学のルジャンドル変換をちゃんと憶えていたんだね．そういうわけで，温度 T の熱浴中では A はある程度のエネルギーを持つ．そのエネルギーのミクロな状態がたくさんあるから，ボルツマン因子が小さくても良いんだ．温度が高くなると，$S(E)T$ の項がもっと効いてくるから，より高いエネルギーを持つようになるわけさ．熱力学で温度を変数にするときに自由エネルギーを使う理由が見えてきただろう．

S　はい．この (7) 式で，最小値を与える E が内部エネルギーですね．

P　そうだよ．ここでは T と V の関数として内部エネルギー $U(T,V)$ が決まり，この $E=U$ を $S(E,V)$ の E に代入すれば，$F(T,V)$ になる．

全エネルギーが決まっている系の熱平衡状態では，そこで可能なすべてのミクロな状態は等確率で実現するというのが出発点の等確率の原理だけど，系を部分系 A と残り全部 B に分けて，B を熱浴と考えると，A のミクロな状態や，マクロな状態の実現確率はすべて同じではなくなり，マクロな状態のエネルギーは自由エネルギーを最小にするものがほぼ 100%実現するというのがここで分かったことだよね．

S　え，確率なので，違うエネルギーの状態も多少は実現するのではないのですか？

P　自由エネルギーが熱平衡の値よりほんのわずか大きい，例えば百万分の一だけ大きな値を取る確率を計算してみれば，マクロな系はそんな状態にはならないことが良く分かるよ．ボルツマン定数はすごく小さな量だからね．

S　これまでの説明で，温度とか，エントロピーとか，自由エネルギーとか分かってきました．温度と内部エネルギーも単純に比例しないことも分かりましたが，始めに戻って，**状態方程式**はどのようにして導出すればいいのですか？

P　そうそう，状態方程式がミクロの情報から分かると嬉しいっていう所から説明を始めたんだったね．熱力学では $F(T,V)$ が分かれば，すべての熱力学状態量が分かってしまうということは，まだ習ってなかったかい．

S　習ったような気がしますが，熱力学を使っちゃっていいんですか？

P　熱力学は一般的に成り立つ関係式を与える学問だから，使うのは問題ない．統計物理で求めるエントロピー，温度，自由エネルギーなどはすべて熱力学のものと一致することが分かっている．だから，ここで求めた自由エネルギーの体積微分から，系の圧力が求まる．

$$P(T,V)=-\frac{\partial F(T,V)}{\partial V}. \qquad (8)$$

これが，**状態方程式**だ．

S　え，これですか？

P　状態方程式は P, T, V の関係を与えるものだから，これで良いだろう．ちなみに，理想気体で右辺を計算すると，分子数を N として，右辺 $= Nk_{\mathrm{B}}T/V$ となり，ボイル=シャルルの法則が得られる．

S　なるほど．

P　今は自由エネルギーを求めてから熱力学を使って圧力を出したけれども，エントロピー $S(E,V)$ から直接求めることもできるよ．エントロピーを体積で微分すると，次の式で圧力が求められる．

$$\frac{P(E,V)}{T} = \frac{\partial S(E,V)}{\partial V}. \tag{9}$$

温度は，$\partial S(E,V)/\partial E = 1/T$ で求まるものだ．その式を逆に解いて，E を T の関数として求めれば，P が T と V の関数として求められる．

ところで，理想気体のエントロピーは定数項を除いて，

$$S(E,V) = Nk_{\mathrm{B}}\left(\log\frac{V}{N} + \frac{3}{2}\log\frac{E}{N}\right) \tag{10}$$

と求められる．N は分子数だ．この式を使って，圧力や自由エネルギーを計算して見ると，今までの話が身に付くと思うよ．

S　やってみます．

P　これで，統計物理学の精神はある程度分かったと思うけど，もっと勉強したければ，例えばT先生の本[5]とかは読みごたえがあるよ．

S　そのうち挑戦してみます．説明，ありがとうございました．

参考文献

1) 吉岡大二郎：『マクロな体系の論理』，岩波書店 (2002).
2) R.P. Feynman: "Statistical Mechanics", W.A. Benjamin (1972).
3) R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands: "The Feynman Lectures on Physics", Addison Wesley (1964).
4) 清水明：『熱力学の基礎』，東京大学出版会 (2007).
5) 田崎晴明：『統計力学 I, II』，培風館 (2008).

（よしおか・だいじろう，東京大学大学院総合文化研究科）

量子力学
波と実在

和田　純夫

1. 量子力学の誕生と疑問

原子の実在，そしてその振舞いがわかってきた20世紀の初頭，古典力学では理解できない世界があることが認識され，試行錯誤の後，量子力学という新理論が1920年代中ごろに完成した．

しかし量子という考え方が最初に示唆されたきっかけは，原子に関する現象ではなく，光あるいは電磁波に関する現象であった．**空洞放射**あるいは**黒体放射**と呼ばれる現象だが，これに関して，量子論の父と呼ばれるプランクの仕事が出たのが1900年，そしてアインシュタインの論文が1905年に発表された．本稿の最初のテーマとして，この，「光」についての初期の議論を取り上げよう．科学史にはありがちのことなのだが，この時期のことについて一部にある誤解も指摘しておこう．

プランクはエネルギー要素という概念を提出し，アインシュタインはエネルギー量子というものを提案した．**量子**（**quantum**）とは小さな塊という意味である．光のエネルギーは，波長ごとに決まるある一定のエネルギー（エネルギー量子）の整数倍の値しかもてないと主張された．次第にこれは，光（電磁波）が，波長ごとに決まる，ある一定のエネルギーをもつ粒子から構成されているからだということになり，その粒子を**光子**（**photon**）と呼ぶようになった．本稿ではこのあたりの事情を最初に論じる．

光ばかりでなく，原子中の電子のエネルギーも，一連の特定の値にしかなれないこともわかってきた．その値を決める規則を最初に提案したのはボーアである（1913）．彼はプランクが光についての議論で持ち出した規則を参考にしたのだが，ボーアの規則は，根拠がはっきりしない天下り的なものだった．電子は波によって記述されるという主張を持ち出して，この規則を正当化しようと提案したのがド・ブロイである（**物質波**の提案，1923）．波と考えられてきた光が粒子であるというのならば，粒子であるとされてきた電子を波と考えてもいいのでは，という発想であった．そしてド・ブロイの理論を精密化して量子力学を完成させたのがシュレーディンガーである（1926）．

これまで，粒子と見なされてきた電子が波であるということになった．しかし「波」であるというのはどういうことなのか．電子に広がりがあってそれが波打っているということではない．波の様子を数学的に表す関数を**波動関数**と呼ぶが，波動関数は物理的には何を意味しているか．電子に限らず，粒子とされてきたものを「波」で記述するというのが量子論の一般的特徴だが，その意味を本稿の第二のテーマとして取り上げる．

波動関数と関連して，量子力学には確率という概念が登場する．例えば電子一つをブラウン管のスクリーンにぶつけると一箇所だけが光る．波の模様が現れるわけではない．しかしどこが光るかは決まっていない．教科書には，「どこが光るかの確率は，各場所の波動関数の絶対値の2乗に比例

する」と書かれている．これは**ボルンの確率則**と呼ばれ，実験により十分に実証されているという意味で正しい．

しかしこの規則は量子論に対してもろもろの疑問を提起する．スクリーンに衝突したときは一箇所だけに発見されるとしても，どこに発見されるかを（確率的にだが）計算するためには，広がった波動関数というものを使わなければならない．では，スクリーンに衝突する直前には電子はどこにあったのか．広がっているのかいないのか．もし電子が現実に存在するものだとしたら，広がったものがスクリーンに衝突した瞬間に一点に縮むと考えるのはかなり奇妙な話である．存在するのは波なのか粒子なのか．電子は実在するものであることは認めるにしても，波動関数はその実在の様子を表現するものではないとする見解を取る学者も多い．それに反対する学者もいる．そもそも量子力学における「**実在**」とは何かという問題についての一つの回答を，本稿の三番目のテーマとしよう．

2. 光――プランク，アインシュタイン，エーレンフェスト

量子論発見のきっかけとなったプランクの仕事の対象は，空洞放射と呼ばれるものであった．これは，高温の容器内部，つまり空洞に充満する電磁波の強度という問題である．容器の壁が放出・吸収を繰り返した結果として空洞内に存在することになる電磁波の強度を波長別に測定する．問題は，波長の短い電磁波の強度が急激に小さくなっていることであった．波長の短い電磁波は放出されにくいとしても，それは同時に，いったん放出されれば吸収もされにくいことを意味する．つまり旧来の物理学では，一定の時間が経過すれば，空洞内の電磁波の強度は波長に依存しなくなると予想されていた（統計力学の**エネルギー等分配則**の一例）．しかし実際はそうではなかったのである．

この問題を解決するためのプランクのアイデアが，（彼はこの言葉は使わなかったが）量子という考えが世の中に登場した最初のものであった．彼は，電磁波を放出するものを**共鳴子**（resonator）と呼んだ．共鳴子とは，彼が以前から研究対象にしていたもので，電磁波を放出するミクロなシステムのことである．ヘルツによって電磁波の存在が確認されたのが 1887 年のことで，プランクは電荷をもつ粒子からの電磁波の放出について研究を進めていた．今で言えば，共鳴子とは原子・分子に対応するものだが，まだ原子・分子の実態も構造もわかっていなかった時代のことであり，プランクは共鳴子を，電荷をもっている粒子が単振動をするミクロなシステムとした．共鳴子が，その振動数と同じ振動数をもつ電磁波を放出・吸収するとして，そのプロセスを研究していたのである．

空洞放射の問題に対しても，彼は共鳴子と，それが放出・吸収する電磁波の間の平衡状態の問題だと考えた[1)]．共鳴子の運動に応じて電磁波が放出・吸収されるとすれば，空洞放射の強度は共鳴子の運動の大きさと比例関係にあるだろう．一般に，運動の各自由度がもつ，温度 T における平均エネルギーは kT 程度とされる．古典力学によれば，これは運動の振動数には依存しない．エネルギー等配分の原理である．しかしそれでは，波長の短い（振動数の大きな）電磁波の強度が小さいこととつじつまが合わない．

そこでプランクは，振動数 ν の共鳴子は，$h\nu$ の整数倍のエネルギーとなる運動しかできないという仮説をたてた．理由はない．ただ，空洞放射の強度分布を正しく再現するための仮定である．h はデータと合わせるためにプランクが導入した定数で，プランク定数と呼ばれるようになった．

このように考えると，振動数 ν の共鳴子の最低エネルギーの運動は $h\nu$ になる．したがって ν が非常に大きい，あるいは温度が低いなどの理由で $h\nu \gg kT$ だとすると，この共鳴子はその温度では運動しなくなり，したがって電磁波も放出しない．プランクはこのようなアイデアを具体的に式で表し，空洞放射の強度分布の実験値が再現されることを示した[2)]．

プランクは電磁波を放出するもののエネルギー

が不連続になるとしたのだが，実際は，各振動数の電磁波自体がもち得るエネルギーが不連続であることが（空洞放射の強度分布の正しい）原因であると主張したのが，アインシュタインの1905年の論文である．

アインシュタインは**光電効果**の理論でノーベル賞を受賞したが，彼の理論はこの1905年の論文で発表されている．振動数 ν の光を金属にあてたとき飛び出してくる電子のエネルギーの最大値が「$h\nu$–定数」という式で表されるという理論であり，アインシュタインは $h\nu$ という単位を，エネルギー量子あるいは**光量子**と呼んだ．光がエネルギー $h\nu$ をもつ粒子の集団であるとすればすぐに理解できることであり，そのためアインシュタインは，光電効果という現象に基づき光量子説を導いたと考える人がいる（私自身も以前，そう勘違いしていた）．

実はこれは誤解であり，彼が光量子説の根拠にしたのはやはり空洞放射である．彼は強度分布に統計力学の手法を適用して，エントロピーの計算をした．そしてこれが，「電磁波の全エネルギー$/h\nu$」個の気体粒子のエントロピーと同じ形をしていることを発見した．つまり電磁波のエネルギーは「$h\nu$ の幾つ分か」，という観点から見るべきだということである．これが彼の光量子説の根拠であり，彼の光電効果の公式は，光量子説からの理論的帰結である．ミリカンによる光電効果の精密な実験が出てアインシュタインの公式が確かめられたのは，10年後の1915年であった（不完全な実験は以前からあったが）．

もう一つ，私も最近知った，ほとんど一般に知られていないことだが，エーレンフェストが1906年，プランクが提示した空洞放射の強度分布の式が，（共鳴子ではなく）電磁波のエネルギーが $h\nu$ の整数倍であるとしても導けることを示している[3)]．この結論はアインシュタインの光量子説と同じだが，アインシュタインは1905年の論文では，（正しい）プランクの式を使ったのではなく，それ以前からあった（不正確な）ヴィーンの式を使っていたという違いがある．

3. 波か粒子か

空洞放射を説明するのに共鳴子（原子・分子）のエネルギーの不連続性を持ち出したのは間違いだったが，実験の進展によって，原子・分子がもつエネルギーにも実際に不連続性があることが明らかになった．原子は，中心にある原子核と，その周囲を回る電子から構成されているというラザフォードの提案（1911）を真剣に受け取ったボーアは，不連続性を説明するのに，電子のエネルギーではなく角運動量が，ある値の整数倍となるという条件を提案した（1913）．これによって水素原子内で電子がもち得るエネルギーを再現することができた．実はこの成功は，クーロンの法則の特殊性によるかなり偶然なものだったのだが，この条件をさらに一般化したボーア–ゾンマーフェルト条件というものは，完全ではないが，より正確な結果をもたらした．

といっても，これらの条件は単に，認めればうまい結果が出るといった天下り的なものであった．そこでこの条件を理解するためにド・ブロイが持ち出したのが物質波という考え方であった．波が一定の領域にきちんとおさまるという条件が，まさにボーアたちの条件に一致するという発想である．そして，この波を表す関数が満たす方程式，つまり**シュレーディンガー方程式**が発表されたことで（1926），量子力学という新理論が確立する．

粒子であると思われていた電子が波であったというのは奇妙な話だが，実際，波の典型的な現象である**干渉効果**を電子も示すことが，早速，実験で確かめられた（デイヴィソン–ジャマー，1927）．100 V から 1 万 V のエネルギーをもつ電子は，電磁波で言えば X 線と同程度の波長の波なので，X 線回折と同様の現象を引き起こす．つまり，結晶にあてると，各結晶格子上の原子から反射された電子波が干渉模様をもたらす．

初期の実験では，多数の電子を含むビームが使われていた．それが次第に，電子を一つずつ入射する実験もできるようになった．それが重要なのは，電子波では，多数の電子が波打っているので

はなく，電子一つ一つが波の性質をもつことがわかるからである．

例えば**2スリット実験**（別名ヤングの実験）は，すぐ横に並んだ2つのスリットを通り抜ける波が干渉するという実験だが，電子一つずつを入射した場合に起きる現象を考えると非常に興味深い．この実験では，スリットの後ろにスクリーンを置き，どこに電子が到達するかを観測する．電子が一つスリットを通った場合，スクリーンのどこか一箇所に痕跡が残る．痕跡は一点だけであり，電子は波ではなく単なる粒子のようである．しかしこの実験を何度も繰り返して痕跡を集めると，全体としては縞模様が出現する．つまり，2つのスリットそれぞれを通過してきた波が，その後ろのスクリーンの位置で干渉を引き起こしているかのようである．

電子は波の性質をもつ．シュレーディンガー方程式を使って状態の変化を求めるには，電子を波として計算しなければならず，実際に干渉効果も観測される．しかし電子一つの位置を測定すると，ある一点だけに検出される．そのときは電子は点状の粒子のように振舞う．

波か粒子かという問題は，シュレーディンガー方程式が登場した当時から問題になった．そして登場するのが，序文でも述べた**確率解釈**である．波動関数がある領域に広がっているとすれば，電子はその領域のどこかに検出される．どこに検出されるか，その確率は，各位置での波動関数の絶対値の2乗に比例する，という提案である．注意すべきなのは，これは「**検出確率**（あるいは発見確率)」だということである．決して存在確率ではない．

検出確率と存在確率の違いは重要である．確率とは，互いに合い入れない（排他的な）現象にしか考えられない．例えばサイコロを投げるとその結果は1から6までのいずれか一つであり，同時に2つの結果が出ることはない．しかし電子の場合，検出前にいずれか一箇所だけにあったと考えることはできない．複数箇所にあった波が動いて重なり合うから干渉が生じるのであり，確率的にしか指定されないにしてもどこか一箇所だけに存在しているとしてしまえば，干渉は起こりようがない．しかし何らかの方法で電子がどこかに検出されれば，（電子が一つである限り）他の位置には検出されない．検出場所は排他的であり，確率という量が考えられる（確率解釈の提唱者とされるボルンも最初はこの点を勘違いしていたようで，後にハイゼンベルクやボーアによって訂正されることになる[4)]）．

波動関数は検出直前までは広がった波を表すが，位置の測定をすると，粒子はある一点で検出される．ボーアはこの現象を，**波の収縮**が起きるとして説明した．測定の瞬間に広がった波が，一点に集中した幅の狭い波に変わるという説明である．それは，シュレーディンガー方程式にのっとった変化ではなく，古典力学的な振舞いをする測定装置との制御不能な相互作用の結果として生じる現象であるとした．つまり量子力学での状態の時間発展は，シュレーディンガー方程式によるものと，観測の結果としての波の収縮との，二重構造をもたされることになった．

ボーアの見方では，電子は波か粒子かといった疑問には意味がない．電子が何かという質問は，古典力学的に記述できる観測と一体にしてしか意味をもたない質問であるとされた．電子の粒子的な性質を検出する観測では電子は粒子として出現し，波動的な性質を検出する観測では波として出現する．いずれも，観測に対応した波の収縮が起きた結果である．観測と切り離して，波動関数が物理的に何を意味するかを問うことはすべきではないという主張であった．電子の波は，観測の結果を確率的に予言するため（だけ）に使われるので，確率波であると言われるようになった．

4. 量子力学は「実在」を表すか

量子力学についての以上の解釈は通常，「**コペンハーゲン解釈**」と呼ばれている．量子力学誕生後すぐに，コペンハーゲンにいたボーアや，その弟分とも言えるハイゼンベルクらによって提唱され

た考え方である．その是非はともかくとして，波の収縮と確率解釈を認めれば，量子力学での計算結果と観測値を比較することができる．量子力学を使うときのマニュアルとして非常に有効であり，その後の物理の発展に非常に役立った．

しかし概念的に大きな問題を抱えているのも事実であり，**量子力学の解釈論争**はその後も，そして現在も続いている．問題は，「電子はどのような状態にあるのか」という自然な疑問を，観測装置と切り離して問うことはできないのかという点にある．

観測をしないとき，あるいは観測をする前には，電子はいったいどのような状態にあるのだろうか．そもそも観測とは何か．もしそれが，人間がする何かの操作を意味するとすれば，この世界に人間が誕生する以前にこの世界がどのような状態になっていたのか，質問してはいけないのだろうか．宇宙はビッグバンから始まったという主張は，量子力学ではどのような意味をもち得るのだろうか．

また，いかなる観測装置であっても，それが何らかの物質である以上，原子・分子から構成されているはずである．したがってその振舞いはシュレーディンガー方程式で記述されるはずなのに，それとは合い入れない波の収縮を持ち出すのはどういうことなのか．

このような当然の疑問に対して多くの人が発言をしているが，まだコンセンサスはできていない．しかしその中で，**多世界解釈**と呼ばれる考え方が特に最近，支持を広げているように私には思える．実は多世界解釈といっても多様なのだが，基本的にどのような考え方なのか，本稿の最後に簡単に紹介することにする[5,6]．

多世界解釈とは，並行宇宙が無数に存在するという理論だが，それは理論の結論であって出発点ではない．出発点はむしろ，波動関数は実在する電子の状態を忠実に表現したものであり，その時間発展はシュレーディンガー方程式「のみ」で記述されるという点にある．

前節で言及した，電子一つずつを入射する2スリット実験を思い出していただきたい．入射した電子は一つずつなのに干渉が生じているのだから，一つの電子が両方のスリットの存在を感じていなければならない．実際，電子を波で表してこの現象を分析する場合には，一方のスリットを通過した波，他方のスリットを通過した波の両方を持ち出して，その和（重ね合わせ）を計算する．この式をそのまま素直に受け入れれば，電子は一つしかないにも関わらず，同時に両方のスリットを通っていることになる．

量子力学の特徴は，状態の重ね合わせが可能だということである．つまり，粒子が一つであっても，複数の状態が**共存**し得る．すでに注意したことだが，これは確率的に（排他的に）どちらか一方の状態であるということではない．複数の状態が真に共存し，その重ね合わせの結果として干渉が起こる．2スリット実験では，電子は一つであっても，各スリットを通過した状態が共存している．

では，その電子がスクリーンに到達したときは何が起こるだろうか．もし波の収縮が起こらないとすれば，ある位置に到達した状態，別の位置に到達した状態等々，無数の状態が共存している．ではなぜ我々は，電子はどこか一箇所に到達したと認識するのだろうか．

ここに，量子力学のもう一つの特徴である**エンタングルメント**（絡み合い，あるいは分離不可能性）が登場する．複数のもの（粒子あるいは物体）が存在するときの状態は，量子力学では常にセットとして記述しなければならない．例えば，スクリーン上の電子，スクリーン上のその痕跡，それを観測する人間というセットがあった場合，状態は（ケット表示を使って抽象的に書くと）

$$
\begin{aligned}
&c_{\mathrm{A}}\ |\text{A 点に到達した電子}\rangle|\text{A 点の痕跡}\rangle \times \\
&\qquad |\text{A 点の痕跡を観察した人}\rangle \\
&+ c_{\mathrm{B}}\ |\text{B 点に到達した電子}\rangle|\text{B 点の痕跡}\rangle \times \\
&\qquad |\text{B 点の痕跡を観察した人}\rangle \\
&+ \cdots
\end{aligned}
$$

となる．c_{A} 等は係数である．この式からわかるように，電子の到達場所が様々であっても，観測者

はそのうちの一箇所にしかその電子を検出しない．コペンハーゲン解釈だったら，波の収縮が起こって上式のうちのいずれか一項だけが残り，その他の項は消失すると仮定する．一方，多世界解釈は，すべての項が残り，共存しながら互いに独立の世界として進行すると考える．シュレーディンガー方程式を尊重する限りそのほうが自然だが，その場合，多数の世界が共存して何も問題はないのか，我々が多数の世界を同時に認識しないのはなぜか，といった問題に答えなければならない．多世界解釈論者はそれに対して，**デコヒーレンス**というメカニズムを根拠に答えるのが普通だが，これについては文献を参考にしていただこう[6,7]．

電子一つだけの波動関数を考えた場合は，もしそれが幅をもった関数ならば，その幅の中に含まれる各点それぞれに電子が存在するという無数の状態が共存していることになる．複数の状態が共存しているという点が従来の自然観とは異なるが，波動関数は実在する電子の状態を表現している．波動関数（上式では係数 c）は，各状態の共存の程度を表す．

共存の程度が直接，確率と結び付くわけではない．波の収縮によって特定の状態を選び出す必要はないのだから，その段階で検出の確率を持ち出す必要はない．確率とは，無数の粒子があったとき，そのうちの何割が「これこれしかじかの性質をもつ」という，**頻度**の問題と見なされる．そしてその頻度は，無数の粒子を含む状態を計算することでわかる．これは基本的には統計学での大数法則と同じであり，量子力学に特別の仮定を持ち込まなくてもわかる話である．

結論として，このように考えれば，量子力学の式で表される状態が，そのまま実在（つまり多世界）を表していると見なすことができ，観測プロセスに支配されない自然な見方が得られるのだが，まだ決着のついた話ではない．

注と参考文献

1) プランクは共鳴子が容器の壁を構成していると考えていたと私は想像しているが，広重徹氏（『物理学史II』，培風館）は，共鳴子は容器内部に気体分子のように存在しているとイメージしているようである．プランクの論文を見てもどちらかははっきりしなかったが，共鳴子と電磁波の平衡状態を考えていることには変わりはない．
2) 日本の幾つかの教科書では，プランクは，電磁波のエネルギーが不連続になるという（現代流の正しい）主張をしたと書かれている．共鳴子とは，電磁波の基準振動のことだという解釈になるのだろう．それが誤解であることは，プランクの論文自体を見れば明らかであるし，内外の科学史の本もチェックしたが，そのような解釈をしているものはなかった．プランクについては，H. Kragh, Max Planck: the reluctant revolutionary, *Physics World* **13** (12), 31 (Dec., 2000) も参考になるかもしれない．
3) 太田浩一，『がちょう娘に花束を』（東大出版会）．
4) 高林武彦，『量子論の発展史』（ちくま学芸文庫）．
5) 一般書としては，和田純夫『量子力学が語る世界像』; コリン・ブルース『量子力学の解釈問題』（以上，ブルーバックス）．
6) Sumio Wada, http://arxiv.org/abs/0909.3188
7) M. Schlosshauer: “Decoherence and Quantum-to-Classical Transition”, Springer-Verlag (2007).

（わだ・すみお，東京大学大学院総合文化研究科）

相対性理論

光から時空へ



二 間 瀬　敏 史

1. 光は粒子か波か

光とは一体何だろう．自然科学の父アイザック・ニュートンは，光は粒子の集まりだと考えた．その理由は光の直進性である．音は，音源の正面に壁をおいても壁の裏側で聞くことができる．それは音が空気の振動という波であるため壁の裏側に回りこむからである．この現象を回折と呼び波の特徴の一つである．一方，光は壁の裏に回りこむことはない．それは光が回折現象を起こさず直進するからである．これをもってニュートンは光が光源から直進する光の粒の集まりだと考えた．しかし光も実際には回折現象を起こすし，ニュートンもそれに気が付いていた．彼の全3巻からなる『光学』の第3巻は回折について述べている．さらにその第2巻には光の干渉についても述べている．波に特徴的なこれらの性質は，光の粒子説をとるニュートンには説明が難しかった．したがってニュートンは，単純に光は粒子であると言い切ることができず，光は何らかの波動性をも備え持つことを認めざるを得なかった

光が波であることを理論的に示したのは，19世紀の最も偉大な物理学者ジェームス・クラーク・マクスウェルである．マクスウェルは電気力と磁気力が電磁気力という起源を同じくする一つの力であることを示した．マクスウェル以前，すでに電線に電流を流すと近くにおいた磁石の針が振れるなどという電気と磁気には何らかの関係があるという実験があったが，マクスウェルは数学的にその関係を明らかにし，現在，マクスウェル方程式と呼ばれる4本の方程式系にまとめあげた．マクスウェル方程式によって2つの力は見事に統一されたが，その必然的な帰結として，電気と磁気の振動が空間を伝わることが予言された．それまでは電気は電荷，磁気は磁石に縛り付けられていたが，電気と磁気は一緒になって電荷や磁石の束縛から解放されて何もない空間を自由に伝わることができるようになったのである．アメリカの物理学者リチャード・フィリップス・ファインマンは，これを称して“さなぎが蝶になった”と表現した．それほど革命的な予言であった．現在の文明の多くは，このマクスウェル理論によっていると言っても過言ではない．その予言された電磁波の速度は，理論の範囲内で計算することができて，当時すでに知られていた光の速度である秒速約30万kmという値と一致するものであった．光の正体は粒子ではなく，電磁波であった．さらに驚くべきことに，マクスウェルの理論の中には電磁波を伝える媒質は存在しなかった．電磁波はそれを伝える媒質を必要とすることのない波であった．このことは当時の物理学者の常識をはるかに超えていた．当のマクスウェルでさえ，電磁波は空間を満たしているある媒質を伝わり，秒速30万kmというのはその媒質に対する速度だと考えていた．

光を伝える媒質を当時の物理学者は，エーテルと呼んだ．エーテルとは，古代ギリシャの哲学者

アリストテレスが想定した天上の世界を満たすものの名前である．しかし光がエーテルを伝わる波であるという解釈は，同時に解決不可能な困難も引き起こした．まず秒速 30 万 km という光の速さは，知られているどんな速さよりも速い．一方で波の速度はそれが伝わる媒質の固さに関係していて，固ければ固いほど速くなる．したがってエーテルは非常に固い物質ということになる．ところが遠くの星が見えるということは，空間はエーテルで満たされているということだ．そんな固い物質の中を，太陽を中心とする地球などの惑星が何の抵抗もなく何億年，何十億年もどうやって公転し続けることができるだろう．惑星はエーテルの中を，トンネルでも掘りながら突き進んでいるのだろうか．だとしたら，地球の後ろ側にはエーテルの穴があいているはずで，その方向の星は見えないはずである．しかし実際には，どの方向からも星からの光は届いている．ならトンネルを掘ってもエーテルは液体のようにすぐ地球の後ろ側にまわり込んでいると考えたくなるが，それはエーテルが固いことと矛盾するだろう．百歩譲ってそんな液体があったとしても，まだ問題がある．液体の中を伝わる波は，振動が進行方向と平行な縦波だけなのである．その理由は簡単だ．横波が伝わるためには，進行方向に対してある方向に媒質が変化する（ずれる）と，それを戻そうとする力が必要だ．この力によって変位は行ったり来たりして振動となるのである．液体や気体には，このような媒質の隣り合った部分がずれたとき，そのずれを引き戻そうとする力は働かない．だから空気中を伝わる音波は縦波なのである．光は横波だからエーテルがあるとすれば，エーテルは固体であるはずだ．このようにエーテルという物質が存在するとしたら，それは矛盾だらけのとても不思議な性質をもたなければならない．

ではエーテルを否定すればよいではないか，と思われるかもしれず，実際に答えはそうであったが，歴史はそう単純に答えにたどり着かなかった．次に紆余曲折の末，アルベルト・アインシュタインによってエーテルが否定されるまで話を進めよう．

その前に，ニュートンが悩んだ問題に戻ろう．ニュートンは，光の粒子説の立場をとったけれども，それを実験的に示したわけではなかった．むしろニュートンリングの発見で，光の波動性を示したのであった．光が確かに粒子として振る舞うという確固とした発見は，1905 年のアインシュタインによる光電効果の研究を待たなければならなかった．そこでアインシュタインは光を金属表面に当てたとき，放出される電子のエネルギー分布から，光が粒子であることを示して見せた．こうして確かに光は電磁波の一種で確かに波ではあるが，同時に粒子としての性質も持つことが明らかにされたのである．ニュートンが悩み，アインシュタインが発見した光に対する粒子と波動の二重性は，残念ながら単純に理解できることではなく，また相対性理論とは直接には関係がないので，これ以上は触れない．相対性理論によりもさらに革命的な量子論への入り口にとなったことだけを述べておこう．

2. マイケルソン・モーリーの実験

上にも述べたようにエーテルには多くの矛盾した性質があるが，それでも当時の物理学者にとって波と媒質は切っても切れない関係にあった．媒質のない振動など考えられなかった．媒質がなければ一体何が振動するというのだろう．空間はあくまでその中を物質が運動する舞台であって，空間そのものは物理学の対象ではなかったのである．そのような雰囲気の中で，エーテルの静止系を探すことで絶対慣性系を求めようというアイデアが物理学者の頭の中に浮かぶことは自然であった．ニュートンの運動の法則の教えるところによれば，見掛けの力が現れない特別な座標系（慣性系）が存在して，ある慣性系に対して等速直線運動をしている座標系はすべて慣性系である．どの慣性系でも力学法則は全く同じ形をとり，運動を観測することではお互いを区別することができない．絶対的に静止している慣性系，すなわち絶対慣性系は存在しないということである．しかし力学法則

では区別できなくとも他の物理法則ではどうだろう．光の速さが秒速 30 万 km に見える座標系こそ，エーテルに対して静止している系であり，それが絶対慣性系ではないのか？ こう考えたのである．

そこでアルバート・マイケルソンとエドワード・モーリーは地球のエーテルに対する速度を観測しようとした．地球はエーテルの中を動いているので，地球の進行方向に出した光はエーテルの向かい風を受け，その速度はその分遅くなるだろう．一方，進行方向と反対側に出した光はエーテルの追い風を受け，その速度がその分増すだろう．したがって，この速度の違いを見れば，地球のエーテルに対する速度が分かるはずだ．実際の実験は，マイケルソン自身が開発した干渉計を用いて行われた．干渉計というのは，光源から出た光を 2 つに分け，それぞれ違った経路を通らせて再び一つの光にする装置である．2 つの違った経路を通る光の速度が同じで経路の距離が等しければ，一つになった光は元通りになるだろう．しかし 2 つの経路で光の速さが違ったり，経路の長さが違ったりすれば，一つになったとき 2 つの光の位相がずれて振動の山と谷が打ち消しあってしまうことがあるだろう．マイケルソン干渉計では，半透明の鏡を使って光を直角に 2 つに分け，分けられた光は同じ距離に置いた鏡で反射されて元に戻り半透明の鏡を通って一つにする．一方の光の経路を地球の進行方向と平行に，他方の経路を進行方向に垂直に向けた場合を考えれば，話は簡単になる．簡単な計算をすれば，エーテルが存在するとするとき 2 つの経路で往復時間には，$(V/c)^2$ に比例した差ができることが分かる．ここで V はエーテルに対する地球の速度，c は光速度である．この時間の差の分だけ，2 つに光の位相がずれることになり，そのずれを測定することで地球のエーテルに対する速度が分かることになる．1887 年に行われたアメリカのクリーブランドで行われた実験は大規模なもので，わずかな振動も測定に影響するため石つくりの巨大な建物の地下で水銀のプールに大理石のブロックを浮かべ，その上に干渉計をおき，さらに街中の交通を止めて行われた．

その結果は，2 つの経路を往復した光に何の位相の差も見つけることができなかった．これは全く想定外のことであった．そこでモーリーは，さらに実験を続けたが結果は変わらなかった．さらに，マイケルソン・モーリーの実験が地下室で行われたからエーテルの影響を受けなかったのではないかと考えて，屋外で同様の実験も行われた．しかし，どの実験結果も地球のエーテルに対する速度は検出できなかった．地球はエーテルに対して運動していなかったのである．あるいは地球は太陽の周りを運動していることは確実なので，光の速度はエーテルの影響を全く受けなかったということである．ここにいたって，光の速度を使って絶対慣性系を求める試みは，挫折してしまった．

多くの物理学者がこの実験結果に頭を抱え込んだ．苦し紛れに干渉計の腕がエーテルの抵抗を受けて縮んで光の速度の変化と打ち消しあい一見，光の速度が変わっていないように見えるのだとする主張もあった．そんな中，エーテルの存在自体に疑問をもった人もいた．それは物理学者ではなく，フランスのジュール・アンリ・ポアンカレという高名な数学者であった．さらにポアンカレは，光の速度が光源の速度によらないとすれば，時間の概念も大きな変更を受けるであろうことに気が付いていた．それは，次のような思考実験を考えてみればすぐ分かる．高速で走る宇宙船の船室の真ん中に光源を置き，ある瞬間に進行方向と反対方向に光のパルスを出す．船内にいる人にとってもちろんそれらのパルスは船室前方と後方の壁に同時に着く．一方，同じ現象を船外にいる人が見たらどうだろう．前方に走っているパルスにとって前方の壁は遠ざかっていて，後方に走っているパルスにとって後方の壁は向かってくる．したがってまず後方に発射されたパルスが後方の壁にぶつかり，そしてその後に前方に発射されたパルスが前方の壁にぶつかる．2 つのパルスがそれぞれ壁にぶつかったという現象を，ある観測者（船内の観測者）は同時に起こったとみるのに，違う観測者（船外の観測者）は違う時刻に起こったとみる

のである．こうして空間的に離れた事件が同時に起こるかどうかは，それを観測する人の運動状態によることになる．これは，空間のいたるところで同じように流れる時間，すなわち絶対時間というものが，存在しないことを意味する．エーテルの存在を否定することは，時間の概念の変更を強いるのである．

このことに気が付いた学者がもう一人いた．相対性理論の創始者アルバート・アインシュタインである．当時，アインシュタインは大学を卒業して数年しかたっておらず，まだ研究職についてもいなかった．しかし大学生の頃からマクスウェル理論に心酔していた．アインシュタインはマイケルソン・モーリーの実験を知らなかったと述べているが，この実験は当時の常識であり，信じがたい．むしろ，マイケルソン・モーリーの実験結果を当然知っていて，その結果について深く考えていたはずである．そしてその結果がエーテルの存在を否定するなら，それは時間ばかりか空間の概念にも大きな変化をもたらすことに気が付いた．時間と空間が密接な関係にあることは，運動する物体の長さを測ることを考えてみれば分かる．物体が運動しているとき，どのようにしてその長さを測るだろう．物体の運動方向に非常に長い物差しを用意して，物体の先端と後端の位置を測ればよいが，物体が運動しているので先端を測った時刻と後端を測った時刻がばらばらでは一体何の長さを測っているのか分からない．そこで先端と後端を同時に測ったときの位置の差を物体の長さと決める．空間的に離れた2点（今の場合は物体の先端と後端）の時刻が同時であるかどうかは，観測者の運動状態による．物体の中にいる人にとって物体の先端と後端で同時に起こった事件は，物体が運動しているとみている人にとっては同時ではない．後端でまず事件が起こって，その後，先端で事件が起こったとみるのである．こうして物体の中にいる人が測った物体の長さ（物体の固有の長さという）と，物体が運動しているとみる観測者が測った物体の長さは違うのである（より短く見える）．この変化は実際に物体が縮んだからではなく，測り方が違うのである．

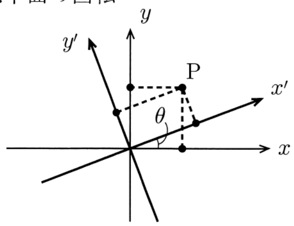
このように光速度が光源の速度によらないことを認めると，観測者の運動状態によって測る時間とか空間の尺度が変わってくる．その尺度はもちろん勝手に変わるわけではなく，「どんな運動（等速直線運動）をしている観測者が測っても光の速度は変わらない」ように変わる．この違う観測者が測るそれぞれの時間と空間の尺度の関係を，ローレンツ変換と言う．アインシュタインは，さらに（等速直線運動をしている）あらゆる観測者に対して物理法則は同じ形をとると考えた．これは，物理法則はあらゆる慣性系（等速直線運動をしている観測者と同じ意味）で同じ形をとるという要請である．あるいは物理法則は，ローレンツ変換に対して形を変えないと言ってもよい．この要請にもとづく理論を，特殊相対性理論と言う．

3. ミンコフスキーとアインシュタイン

アインシュタインが現在のチューリッヒにあるスイス連邦工科大学の学生だった頃，一人の数学教授がいた．ヘルマン・ミンコフスキーというユダヤ系ドイツ人で，アインシュタインが大学に入った年に，ケーニヒスベルグ大学助教授から准教授として移ってきた将来を嘱望された若い数学者だった．アインシュタインは数学があまり得意ではなく，授業をしょっちゅうサボっていたようで，後に特殊相対性理論をつくったのがアインシュタインだと知って，“あの怠け者のアインシュタインが！”と絶句したそうだ．1902年にはゲッチンゲン大学にいた当時最も有名な数学者ダフィット・ヒルベルトが，ミンコフスキーのために新しい講座をつくり教授に迎え入れた．当時のゲッチンゲン大学は世界最高峰の数学者，物理学者達がいる数理科学のメッカであった．その雰囲気の中でミンコフスキーは，特殊相対性理論に触れ，そしてそれが幾何学的に定式化できることを示した．

ミンコフスキーは，違う慣性系の間の時間と空間の関係を表すローレンツ変換が，ある一つの‘空間’の中の座標変換であることに気が付いたのであ

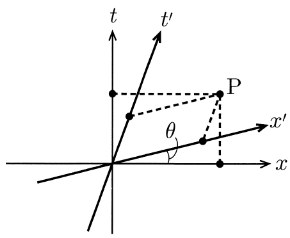
2次元平面の回転



$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

ローレンツ変換



$$ct' = \frac{ct - \frac{V}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$x' = \frac{x - \frac{V}{c}ct'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\tan\theta = \frac{V}{c}$$

図1　2次元平面の回転（上）とローレンツ変換（下）．

る．その‘空間’とは，ローレンツ変換が1次元の時間と3次元の空間の間の関係なので，4次元の広がりをもったもの（数学的には多様体と呼ばれる）で，‘4次元時空’あるいは現在では，ミンコフスキー時空と呼ばれる．この考えを，イメージしやすいように2次元平面の例で説明しよう．2次元平面に適当に原点をとって，原点で交差し直交する2つの直線を，それぞれ x 軸，y 軸とする．このような座標系をデカルト座標系と言う．すると平面上の点は，x 座標と y 座標で指定することができる．例えば，その座標が，$(3,4)$ だったとしよう．次にこの座標系を原点まわりに適当に回転して新しいデカルト座標系をつくり，それを x' 軸と y' 軸とする．すると，前と同じ点は，新しい x' 座標と y' 座標で表される．例えば，$(4,3)$ である．同じ点であるが，座標系が違うため，座標値が違ってくる（図1）．観測者による時間と空間の尺度の違いもこのようなものだというのが，ミンコフスキーの考えである．この立場では，ローレンツ変換とは4次元時空上の座標変換にすぎない．時間と空間は別々に存在するのではなく，4次元時空の中の座標軸として観測者ごとに存在するのである．

もちろん勝手に座標軸を選べるわけではない．ここでも2次元平面の例が参考になる．この場合，原点から考えている点までの距離が，2つの座標系で同じである（$3^2 + 4^2 = 4^2 + 3^2$）．回転によって原点からの距離は変わらないことから，これは明らかだ．逆に言えば，このような不変量が存在すれば，座標軸同士の関係がどのようなもので，それをどのように4次元時空上で表せばよいかが分かる．ローレンツ変換の場合，それは2つの慣性系における時間座標と空間座標を，それぞれ (t,x), (t',x') とすると（今，簡単のため y 座標と z 座標は，2つの慣性系で同じとしている），$-c^2t^2 + x^2 = -c^2t'^2 + x'^2$ となっていることが分かる．この関係を満たすように2つの座標系が4次元時空の中に描かれるのである．これは光速度が2つの慣性系で変わらないことの表現でもある．光速度 c が1となるような単位系をとり，時間を純虚数にとって $\tau = it$ などとすれば，上の関係は $\tau^2 + x^2 = \tau'^2 + x'^2$ となる．これは，正に2次元平面の回転を表す．実際，ひと昔の教科書を見ると時間をこのように純虚数にして，ローレンツ変換を書いているものも多数見受けられる．

アインシュタインは最初，ミンコフスキーのこの考えに，自分の発見を必要以上に数学的に複雑にしていると否定的であったという．しかし後に特殊相対性理論で唯一取り残された重力の理論を，相対性理論の要請に整合的にする挑戦を始めたとき，4次元時空の考えが不可欠であることを認めたのである．

時間と空間は万人に共通で他の存在と離れて無関係に存在するという絶対性を失ったが，その代わり4次元ミンコフスキー時空が絶対的な存在として現れた．ミンコフスキー時空は固定され，その中で観測者が時間軸，空間軸を適当に選んでいるのである．しかしミンコフスキー時空の絶対性も長くは続かなかった．重力の相対性理論である一般相対性理論では，4次元時空でさえ曲がり，そして運動するのである．4次元時空の中で重力がない特別な場合がミンコフスキー時空であり，平坦な時空と呼ばれる．

（ふたませ・としふみ，東北大学大学院理学研究科）

自然界の究極構造

原子から素粒子へ



日置　善郎

1. はじめに

この稿の目的は，大学の新入生や大学物理にまだ慣れていない学部学生を主な読者対象として，現代科学はどこまで自然の微視的究極像に迫っているかを3つのキーワードの下に紹介することである．限られた頁数の範囲内で数式を用いた細かい話を展開すると混乱が生じる恐れも少なくないため，定量的な解説よりもむしろ研究最前線の雰囲気を感じてもらうことを主眼としたい．

まずは，現状を簡単に述べておこう．我々の「自然の構成要素」に関する認識は「原子→原子核&電子，原子核→陽子&中性子→クォーク」と進んできた．「そんなことくらい知ってるゾ！」という諸君も多いと思うが，それぞれの粒子はその左側の粒子の構成要素となっている．現時点で基本構成要素（＝**素粒子**）のリスト上にいるのは

- **クォーク**：陽子や中性子を構成する粒子とその仲間（計6種類）．
- **レプトン**：電子とその仲間（計3種類）および電気的に中性でわずかな質量しか持たないニュートリノ（計3種類）．
- **ゲージボソン**：素粒子間の力を媒介する光子とその仲間（計4種類）．

および質量を生み出す源と考えられている**ヒッグスボソン**（未発見だがその存在は近い将来実験で確認されると期待されている）である[1]．

ここで，もしもこれらの粒子群が天体や地上の物体の運動と同じ法則に従うのなら，この先の話は手短なもので済ませることもできる．例えば，「原子の構造は太陽系の構造と同じです」という具合．しかし，現実の自然はそれほど単純ではなく，そのため，我々は「微視的世界には何が存在？」という疑問に答えるだけではなく「それらは如何に存在？」すなわち「究極粒子の世界を支配する究極法則は？」も説き明かさなければならない．実は，近代科学誕生期には上記の太陽系の構成についても同じことが当てはまった．「太陽系においては，水星・金星・地球…という惑星が太陽の周りを回っています」というだけの認識では不十分であって，それぞれの惑星にどういう力が作用し，どういう法則に従った結果そのような回転運動が生まれるのかという理解も重要だったわけである．そして，この惑星運動を実現する法則は**古典力学**（より一般的に言えば古典物理学）としてまとめられており，同様に微視的世界を記述する法則は**量子力学**という体系として確立されている．

以下では〈古典物理の限界〉，〈量子力学の世界〉，〈自然の基本構成要素〉をキーワードとして設定する．初めの2つは主に「究極法則」に，3番目は主に「究極粒子」に関するものである．なお，古典物理と同様に，微視的世界の物理学の対象も力学現象だけではない．その意味では量子力学と言うより量子物理学と言うほうが正確だろうが，本稿では多くの読者にとって馴染みが深いと思われ

る「力学」という言葉も特に区別することなく用いて話を進めることとする．

2. 古典物理の限界

日本に生まれて日本で普通に育てば，誰でも日本語を話すようになる．そして，皆そんなことは当り前のこととして普段は意識すらしない．しかし，自分を中心とする円を考えその半径をどんどん大きくしていけば，やがてはその円は日本語が通用しない世界にぶつかることになる．そのような領域に実際に足を踏み入れる経験をすれば，日本語が通用するのはある限られた範囲内だけと実感できるだろう．

実は，自然の言語（法則）にも同様に**適用限界**がある．「自然は人間に無関係に存在するのだから，そんな限界などあるはずがない」と考える人もいるだろう．確かに，人間がいなくても太陽は輝き続け，地球はその周りを回り続けるはずだ．しかし，自然の法則とは自然そのものではなく，自然界に潜む規則性を人間の言葉で表現したものであり，かつ，人間はその規則をまとめるにあたって自然現象のすべてを知っているわけではない．つまりは情報不足・材料不足の状態で作業を行ってきたのだから，不完全なところがあっても仕方ない．

高校の物理で教えられる事項の多くは，前述の古典物理学と呼ばれる分野に属している．これは19世紀の終りまでにほぼ完成された体系であり，そのため「古典」と表現されてはいるが，我々が日常的に体験する現象の大部分を見事に記述してくれる．しかし，19世紀終盤から20世紀に入り，技術の進歩が原子スケール以下の極微世界での様々な実験を可能にし始めると，そこでは古典物理はうまく機能しないことが次第に明らかになった．正に，古典物理が適用限界にぶつかったのだ．そして，より適用範囲の広い正確な法則を探す研究者の努力・苦闘の結果生まれてきたのが量子力学である．実際，これは極微世界を見事に記述し，現代の科学技術を根底から支える重要な基礎体系となっている．

3. 量子力学の世界

3.1 古典力学と量子力学

古典力学が適用限界を持つなどと聞くと，ではなぜそれが今でも高校で教えられているのか？ とか，なぜ19世紀までの研究者たちはそれに気付かなかったのか？ といった疑問も湧くだろう．それは，微視的世界のような極限的状況に入り込まない限り，古典力学が量子力学の非常に良い近似形になっているからである．少々抽象的な話になるが，$y = x$ という関数を古典力学に，$y = \sin x$ を量子力学に例えてみよう．両者は見かけは全く異なる関数だが，$|x|$ がある程度大きくなるまではどちらもほぼ同じ y の値を与える．もちろんこの2つの関数が完全に一致するのは $x = 0$ の点のみだが，自然科学で異なる説の優劣を判定するのは実験や観測であり，そのデータにはどんな場合でも避けられない誤差が存在するため，$|x|$ が小さい領域で両者を区別するのは事実上不可能というわけである．しかし一方で，この限定された領域で両者がよく一致するからといってもっと広い範囲でも同じように一致するという保証などは全くない．

技術の進歩は正に $|x|$ の大きい領域での実験を可能にし，$y = x$ はいつまでも正しい答を出し続けるだろうという19世紀の研究者の予想を覆してしまった．但し，このような場合にも注意すべきは「($y = \sin x$ という適用範囲のより広い法則が見つかったからと言って) $y = x$ という法則はもう不要と決めつけてはならない」ということである．なるほど論理的にはその通り $y = \sin x$ だけで十分かも知れないが，実際の計算を進める際には $y = x$ のほうが $y = \sin x$ よりもずっと扱いやすい．だから，適用限界さえ意識しておけば $y = x$ の重要性も損なわれることはない．すなわち，古典力学の適用範囲内の問題ならば，古典力学で調べるほうが遥かに実用的であり間違いも少ない．だからこそ，古典力学は現在でもその意義を全く失っていないのである．

3.2 量子力学とは

それでは，古典力学を超え微視的世界でも有効

な「量子力学」とはどのような力学体系だろう．まず初めにお断りをしておくと，高校を卒業したばかりの大多数の学生諸君がその基本構成を短時間でスッキリと理解できるなんてことはあり得ない．いきなりこんなことを書くと「全く戦わずに試合放棄かい！」と突っ込まれかねないが，量子力学と40年近く付き合ってきた筆者はこう言わざるを得ない．天才的研究者であり場の量子論（後述）の基礎を築いた1人のリチャード・ファインマンも “*I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics.*” と自信を持って（？）述べている[2]．

いったい何がそんなに厄介なのか．量子力学入門時に感じる難しさは，例えば “この因数分解メチャ難しいよ～” というような話とは少々中身が異なり，要するに「未知のものに対する戸惑い」がその主原因と言える．従って，これは確かに新種の難敵（？）である．しかし，だからと言って過度に恐れる必要はない．これは逆に，慣れさえすれば，その心理的抵抗は軽減され実際の計算も（ある程度までは）できるようになるということでもあるのだから．

何はともあれ，少し具体的に古典力学と量子力学を比較しその差を味わってみよう．前者では，運動粒子が従う基本法則は**ニュートンの運動方程式**

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{F}} \tag{1}$$

である．但し，m は粒子の質量，$\vec{\boldsymbol{r}}$ は粒子の位置ベクトルであり $\vec{\boldsymbol{F}}$ はこの粒子に作用する力を表している．この結果，一旦 $\vec{\boldsymbol{F}}$ の形が与えられれば，この微分方程式を $\vec{\boldsymbol{r}}$ について解くことにより粒子の位置が時間 t の関数として決まる，つまり運動の詳細が確定するということになる．実際に運動する物体を眺めても位置ベクトルなど何処にも存在はしないが，それでもこのような運動の記述方法が全く理解できないという人は多くはないだろう．

では量子力学における粒子の運動記述はどんなものだろうか．この問に対し第一に我々が認めなければならないのは，微視的世界の粒子は同時に波動の性質も持ち，逆に光のような波動は粒子的性質も併せ持つという実験事実である．光電効果や電子ビームの回折・干渉といった現象がよく知られた例であり，電子顕微鏡などは正に電子の波動的性格を利用した装置である．このために，例えば一つの電子を考えるとき頭の中に輪郭のはっきりした球を描いてしまうと，間違いなく思考の迷路に皆はまり込む．

この点には目をつむり，ともかく時刻 t, 点 $\vec{\boldsymbol{r}}$ におけるこの電子の波動（電子波）の振舞いを $\psi(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$, その場所での電子の位置エネルギーを $V(\vec{\boldsymbol{r}})$ と表すと，この**波動関数**と呼ばれる量 ψ は

$$\begin{aligned}&\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{\boldsymbol{r}}, t)\\ &= -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)\psi(\vec{\boldsymbol{r}}, t)\\ &\quad + V(\vec{\boldsymbol{r}})\psi(\vec{\boldsymbol{r}}, t)\end{aligned} \tag{2}$$

という微分方程式に従うことが知られている．ここで，h は**プランク定数**と名付けられた極めて重要な定数である：

$$h = 6.62 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s.} \tag{3}$$

この (2) 式が**シュレディンガー方程式**の名を持つ量子力学の基本方程式で，古典力学におけるニュートンの運動方程式 (1) と同じ役割を果たす[3]．

さて，いよいよ核心部分：この方程式が解けて波動関数 $\psi(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$ が求まったら電子の運動について何がわかるのか．実は，時刻 t に場所 $\vec{\boldsymbol{r}}$ においてその電子が見つかる**確率**を $|\psi(\vec{\boldsymbol{r}}, t)|^2$ が教えるのである．「ここまで辛抱して読んできたけどもうアカン」という声も聞こえそうだが，正にこういう新しいスタイルの法則が量子力学を難しいと感じさせてしまう．ここは前述の通り教科書を繰り返し読んで「慣れる」ことが肝要だ．科学を学ぶ際に大切なことは，実験・観測（＋解析）が示す事実を偏見や先入観なく眺めることなのだから[*1]．

3.3 確率的予言は不正確？

古典物理は正確な予言をすることでよく知られ

[*1] 偉そうに書いているが，学生時代の筆者は，こういう素直な態度は全くとれなかった．時間をかけて慣れるしかないというのは正に体験談である．

ている．昨年7月話題になった皆既日食も，古典力学のお蔭で何年も前からわかっていた．それに対して，量子力学では対象に関する情報が確率の形でしか得られないというのはどういうことだろう．古典力学よりも量子力学のほうが正確な理論と言ったのに，これでは全く逆ではないか．こんなことで電子工学など最先端技術の基礎たり得るのだろうか．確かに，量子力学誕生後しばらくは，根本法則における確率の登場に対して研究者の中ですら“おかしい，気に入らない”という声も珍しくなかった．そこにはアインシュタインも含まれている！ しかしながら，電子回路を考える際などに1個の電子だけを扱うようなことはあり得ない．わずかな量の電流と言えどもその中身は無数の電子の流れである．そして，1個の電子の運動に対して例えばある分岐点で左右に進む確率がそれぞれ0.5という予言が得られたなら，個々の電子がその分岐点でどちらに進むかは確定できなくとも，電流全体は確実に半々に分かれる．つまり，膨大な数の電子が対象となれば確率的予言も確定的予言となるのである．

3.4 古典的世界と量子的世界の境

微視的世界を特徴づける基本的尺度はプランク定数で与えられる．我々が日常生活で経験する諸現象に顔を出す様々な数値に比べると h は0と見なしても何ら差し支えないような微小な量であるが，微視的世界にいけばもはや h も無視できなくなる．これが古典物理で記述可能な世界と記述不可能な世界の境目と言ってもよい．もしも古典物理の適用範囲内で量子力学との差を見ようとするなら，物体の運動量や位置なども h の程度，つまり小数点以下30桁ほども測定しなければならない．こんなことは現実には不可能である．但し，一見古典物理の守備範囲と思われる現象の中にも不可解なものもあった．強い直射日光の下ではすぐに日焼けするのに赤外線ストーブの前では何も起こらないことや，遥か遠方の星からやってくる光は極めて弱いはずなのにその星も夜空に輝くのが見えることなどである．これは前述の光電効果と本質的に同じ現象で光の粒子性によって初めて理解できることであり，事実，我々を量子力学という新しい法則へ導く役割も果たすこととなった．

4. 自然の基本構成要素

4.1 原子・原子核・素粒子

微視的世界を記述する言語の紹介が一通り終わったので，この世界の基本構成要素の話に進もう．最初に，素粒子の意味を「自然を構成する最も基本的な粒子」と約束する．但し，本稿の2節にも書いたように，我々は自然界に関する完全な情報など持っていない．従って，この素粒子の意味も，研究の進展に依存して時代とともに変化することになる．その意味では，原子が物質構成の最小単位であった頃は，原子こそが素粒子だった（「素粒子」という名称自体はもっと後から登場したが）．

原子の中にさらに小さい芯があることを示したのは約100年前に行われたラザフォードの散乱実験である．これは α 粒子を原子に打ち込む実験で，それまで有力だったトムソンの無芯模型に従えば α 粒子はほとんど進路を曲げられることなく原子内を通過するはずだった．ところが，ときおり大角度の散乱が起こるという予想外の結果が得られ，「原子質量の大部分が集中する小さな芯（＝原子核）の周りを電子が回る」という原子像が生まれた．但し，このような構成の原子が安定に存在することの説明には量子力学が必要だった．実際，古典電磁気学に従えば原子核の周りを回転する電子は電磁波を放射し続け，結果としてエネルギーを失い原子核に落ち込んでいくという受け入れがたい結論に至ってしまう．一方，量子力学は電子を波動関数で記述するため，その波動が安定に存在できる条件によって電子軌道は特定なものに限られる．この結果，許される一番内側の軌道上の電子はそこに留まらざるを得ず，電磁波の放出もエネルギー保存則で禁止され原子の安定性が保証されることになる．原子内は，まさしく古典物理の適用範囲外なのである．

永年にわたり物質構成の最小単位と思われてきた原子にもこのような内部構造があるとわかれば，

原子質量の大部分を担う原子核の構造が次の興味の対象となることは自然な流れだろう．当初，原子核電荷と質量（＋当時知られていた粒子）に関する考察より，原子核は陽子・電子からなるという可能性も追究されたが，中性子の発見によって「原子核＝陽子と中性子の複合系」であることが明らかになった．このとき，陽子・中性子を束ねる力（核力）の正体の解明に挑んだのは湯川秀樹である．彼はその試みの中で核力の媒介粒子として中間子の存在を予言し，その発見は彼に日本人第1号のノーベル賞をもたらした（1949）．この頃の素粒子は，陽子・中性子や電子・光子およびその中間子ということになる．

この時代は比較的長く続いたが，その間に上記の粒子と同じレベルの新しい素粒子が宇宙線観測において続々と見つかり，混沌の時代ともなった．しかしながら，その後これらの粒子群は素粒子の地位を明け渡すこととなる．1969年に始まったスタンフォード線型加速器における電子陽子散乱実験で，陽子が点状粒子の複合体らしいことが見出されたのである．これは現代版ラザフォード実験とでも呼べるだろうか．この新情報は，粒子の群論的分類に基づき提案されていたクォーク模型と「点状粒子＝クォーク」という形で結び付き，クォークが電子やその仲間とともに素粒子の役割を担うこととなった．

4.2 精密な言語：場の量子論

量子力学としてまとめられた微視的世界の新法則は，様々な原子レベルの現象を見事に記述したが，不満足な面も残っていた．その一つは，相対性理論の効果が取り入れられていないことである．多くの原子核・素粒子反応においては，関与する粒子のスピードは光速と比べて無視できない程度にもなる．従って，そこでは正に相対論が必要であるにも拘わらず，シュレディンガー方程式は相対論の基本原理と共存できる形にはなっていなかった．もう一つは，多粒子系の取扱いである．このような相対論的世界の素粒子反応では，粒子と反粒子が衝突して光子になったり逆に高エネルギー光子が別の粒子・反粒子の対を生むことも頻繁に起こるため，必然的に多粒子系の明確な記述が要求される．ところが，シュレディンガー方程式と波動関数から出発する枠組みは（記述不可能というわけではないが）便利な形式とは言い難い．

これらの弱点をカバーできる言わば“上級量子力学”の体系として登場したのが場の量子論（より正確には，**相対論的場の量子論**）である．この理論においては，どの素粒子もまず第1段階では波動場として定式化され，次にその波動場が量子力学的に取り扱われる（この手続きを**場の量子化**という）．この操作により，大変面白いことに波動場は（任意個数の）粒子集団の性格も示すようになる．その典型例は，光の場すなわち電磁場だった．これはすでに古典物理でお馴染みの波動場だが，その量子化で出現する「粒子像」が**光子**である．しかし，もともとは波動だった光に粒子的性格が生まれるのは驚きだが，初めから粒子と見なされていた電子などに「粒子性」が出現して何が嬉しいのか．それは，1個1個の粒子を扱う量子力学に比べ，場の量子論的手法が生成消滅も起こる多粒子系の記述に非常に有効ということである．こうして誕生した電子と光子の理論体系**量子電磁力学**は，くりこみ理論という名で知られる朝永振一郎らの研究により精密化されて輝かしい成果をあげた[4)]．

素粒子の基本的相互作用には，この電磁力の他に，クォークから陽子や中性子をつくる力で核力の源でもある強相互作用と素粒子の種々の崩壊現象を引き起こす弱相互作用があり[*2)]，量子電磁力学の成功は，場の量子論がこれらの相互作用の記述にも応用できるのではないか？ との期待を抱かせた．実のところ，これはそれほど易しい話ではなく，幾つかの新しい概念の発見・導入が必要だったが，多くの研究者の努力の結果，素粒子物理学の標準理論として実を結んだ[*3)]．そこにおいては，電磁相互作用と弱相互作用は共通の**電弱相**

*2) 重力も基本的相互作用の一つだが，宇宙初期の様な超高温・超高密度の状態でなければ無視できる．

*3) 新概念の一つは南部陽一郎のノーベル賞受賞研究「対称性の自発的破れ」である．

互作用という起源をもつことが明らかにされ[5]，また，強相互作用は**量子色力学**という名の「クォークおよび力の媒介粒子グルオン（ゲージボソンの一種）の力学」としてまとめられている[6]．

4.3 クォーク：究極の素粒子？

2008年秋の日本社会はノーベル賞に沸いたが，そのうち小林誠・益川敏英の受賞対象はCP対称性の破れの研究で[7]，その記述のためには最低6種類のクォークが必要であると結論されていた．冒頭で紹介したように，現時点では，このクォークこそが電子や光子などとともに自然界を構成する最小の要素であると認識されている．そして，これらの素粒子はすべて場の量子論で記述可能である．

また，読者の中には「超対称性理論」という言葉を耳にしたことのある人もいるかも知れない．これは，どの素粒子にも超対称的相棒とでも呼ぶべき粒子（場）が存在するというものである[8]．これまでのところ，このような新種の粒子は一つも見つかってはいないが，超対称性は，それを持たない理論が抱える幾つかの困難をうまく解決すると考えられている．しかし，この超対称性粒子も，場の量子論的な観点では我々がこれまで知らなかったような新しいタイプの素粒子というわけではない．既存の粒子と異なるのは超対称性に関わる新しい量子数が付与されていることだけである．

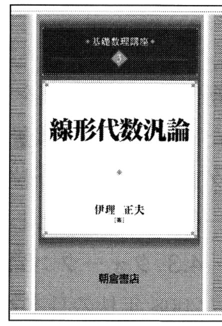
それでは，我々はついに自然界の究極の構成要素と究極法則に到達したのだろうか．それとも，さらにその背後にもっと基本的な何かがあるのだろうか．残念ながら…と言うか幸運にもと言うべきか，ゴールはまだ先である．素粒子の標準理論が究極理論というのであれば，それぞれの粒子の質量や相互作用の大きさを決める結合定数などもすべてその枠組みの中で導き出されねばならないはずだが，現時点ではそれらは実験データから決めるしかない任意定数に過ぎないからである．

と言うことは，クォークやレプトンもさらに下部構造を持つのだろうか．あるいは現在注目されている超弦理論（超ひも理論とも言う）が示すように，素粒子は極めて短い弦なのだろうか[9]．その答えはまだ誰にもわからない．今この瞬間も，そのような根源的な問題に向かって精力的な研究が続けられている．量子力学誕生に貢献した研究者の多くは20代だった．歳とともに「常識」が身についていけば研究の突破口となる「非常識なアイデア」は出しにくくなることを思えば驚くことではないだろう．現代素粒子物理の最前線でも，多くの若い優秀な頭脳の参入が期待されている．

参考文献

1) ここではこれらの粒子それぞれに詳しい説明を加えることはしない．書店に行けば数多くの解説書が並んでいるので，興味ある読者は積極的に読んでほしい．
一般向け解説なら例えば南部陽一郎，『クォーク　第2版』講談社ブルーバックス (1998); 小林誠，『消えた反物質』講談社ブルーバックス (1997).
物理専攻の学生が机に向かって読むような解説書なら例えば渡邊靖志，『素粒子物理入門』培風館 (2002).
2) R. Feynman,『The Character of Physical Law』(Ch. 6) British Broadcasting Corporation, London (1965): 邦訳は『物理法則はいかにして発見されたか』（江沢洋，岩波現代文庫—学術）.
3) 竹内淳，『高校数学でわかるシュレディンガー方程式』講談社ブルーバックス (2005).
4) 場の量子論の発展を解説した文献としては，例えば，吉田伸夫，『光の場，電子の海』新潮社 (2008).
5) 数理科学 2007年11月号（No.533）特集「電弱統一理論—素粒子物理学発展のキーワードを巡って」.
6) 数理科学 2006年3月号（No.513）特集「強い力—量子色力学がひらいた統一への系譜」.
7) Cはすべての粒子と反粒子の役割を，またPは現実世界と鏡の中の世界を入れ換えるという操作（変換）を表す．両変換を同時に施したとき基本的な物理法則の形は不変と信じられていたが，それがほんの僅かながら破れているということがフィッチ，クローニンらの実験により明らかにされた：J.H. Christenson, J.W. Cronin, V.L. Fitch and R. Turlay, *Phys. Rev. Letters* **13** (1964), 138.
小林・益川の研究は，この事実を如何に理論の枠内に含めることができるかというものだった：M. Kobayashi and T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973), 652.
8) 数理科学 2007年3月号（No.525）特集「現代物理における超対称性—統一理論へのキーワード」.
9) 素粒子は点状ではなく極めて短い弦であり，その振動パターンから素粒子の基本的属性が導かれるという理論． 時空の次元も含め，数学的・物理的整合性からの制約がきつく，それだけに確定的な予言が可能であるという期待が持たれている．但し，現時点ではこれ（素粒子＝弦）を示唆するような直接的実験データはない．入門的解説としては，例えば竹内薫，『超ひも理論とはなにか』講談社ブルーバックス (2004).

（ひおき・ぜんろう，徳島大学総合科学部）



線形代数汎論

伊理正夫著，A5 判，344 頁，本体 6400 円，朝倉書店

微分積分は二度学べ，という格言を若い頃聞いたことがある．若いころは新しいことを覚えるのに夢中で，あまり気にもとめなかったが，今はなるほどと思う．線形代数は二度といわず，一生のお付き合いになる人も多い．伊理正夫，『線形代数汎論』は是非手元においておきたい本である．通読するもよし，必要に応じて拾い読みをするのもよし，であろう．

私は著者の伊理先生とは個人的面識はないので，業績からの推測でしかないが，著者は線形代数と長く深い付き合いがあるものと思われる．それは計算機の進化と計算による数理科学や技術の急展開と同時進行した．その点をこの本は明示的に説明しているわけではないが，本全体から伝わる迫力は，このような歴史のエネルギーが裏にあるものと思う．

まえおきが長くなった．この本は全部で 9 章ある．各章の表題をあげておこう．1. 線形代数の周辺．2. 行列と行列式．3. ベクトル空間．4. 線形方程式系．5. 固有値．6. 行列の標準形と応用．7. 一般逆行列．8. 非負行列．9. 行列束．A. 行列式と Pfaffian に対する組合せ論的接近法．

7 章以前は標準的内容と思われるかもしれない．さにあらず．以下各章を概観してみたい．

2 章が本論のスタートである．対称群で行列式を定義する方法を縦横無尽に使い，行列，行列式，その仲間の様々な公式を導出している．“交代化演算” がこの方法のキーワードであるが，これに慣れるのは少々努力を要する．2 章の後半には，行列の基本変形についての解説のあと，LU 分解，対称行列の Cholesky 分解，QR 分解が登場する．これらの分解は，計算機による行列の扱いで脚光を浴びている．この本では，これらの分解を早い段階で導入し，理論的な展開にも活用している．2 章が終わったところで 117 ページである．演習問題にも内容の補足となるものも多い．実は私はこの本の前身『岩波講座 応用数学 線形代数 I, II』からの愛読者であるが，いままでは必要な個所しか読んでいなかった．特に **Z** 上の線形代数（というか **Z**-自由加群）での基本変形などの話題を，懇切丁寧に書いてある文献として学生にこの部分を勉強してもらったことも何度かある．今回書評を書くにあたって，最初から読破しようと，意気込んでみたのだが，知らなかったこともたくさん書いてあり，結局 2 章のきちんとした理解にはまだほど遠い．しかしながら，時間を見つけてはこの 2 章を読むのは，至福の一時でもあった．この本には書いてないが 1990 年代にさかんに研究された hyperdeterminant などもまた勉強してみたい，と意欲も膨らんだ．

3 章 “ベクトル空間” および 4 章 “線形方程式系” はひととおり線形代数を知っている人にとっては，ほっと一息付ける標準的な内容であるが，ところどころこの本に特徴的な興味深い記述がある．Farkas の補題は線形計画，整数計画で基本的だがところどころで言及される Farkas 流解釈も面白い．また，計算機による連立方程式の解法に重要な反復法が簡潔に説明してあり，より専門的な大規模線形計算へのよき導入になっている．

この本は大学初年用の線形代数の教科書とは全く趣きを異にしている．例えば，5 章 “固有値” では，まずユニタリ行列により行列を上三角行列に変形する構成的方法を導入する．この上三角行列を Schur 形と呼ぶ．これを基本として Jordan 標準形を帰納法で構成している．また固有値の存在範囲を記述する Gershgorin の定理などの不等式的な話題も詳しく解説してある．

6 章 “行列の標準系と応用” では既約形，周期標準形，Dulmage-Mendelsohn 形，組合せ正準形，階数標準形，Sylvester 形，Hermit 標準形，Smith 標準形，そして Jordan 標準形が登場する．これらの名前をあげるだけでも，この本の持つ雰囲気が伝わるであろう．

7 章以降は結局この書評の締め切りに間に合わなかった．言い訳をすると自分にとり初めての話題が多く，ざーっと眺めるだけでもそう簡単ではなかったからである．また時間を見つけて読むのが楽しみである．

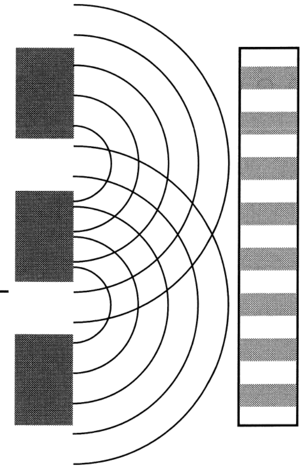
初めて線形代数を学ぶ学生には，よほどの強者でなければこの本を勧めることはできないが，線形代数は，学生だけでなく，多くの科学者，技術者が一生お付き合いする分野である．是非この本を座右の書として加えてほしい．

高山 信毅（神戸大学大学院理学研究科）

BOOK REVIEW

目で見て学ぶ量子力学

第18回 実験でひもとく量子の不思議



高温超伝導体の磁束量子を見る

外村　彰

18.1 はじめに

今回は，100 万ボルトホログラフィー電子顕微鏡を使って観察した高温超伝導体中の磁束量子の話をする．透過能の良い電子線の開発によって，超伝導内部の磁力線が見えるようになり，磁束量子がうねったりする様が見えるようになった．

超伝導体中を無損失の導電体として利用しようとすると，磁束量子の挙動が決め手になる．電流を流したとき，磁束量子に力が働いて動いてしまうと，超伝導状態が壊れてしまうので，超伝導体に欠陥を導入して磁束量子が動き出さぬようにピン止めをしなければならない．とりわけ高温超伝導体のピン止めが難しいのには訳がある．層状構造をしている上，高い温度で動作するため，磁束量子の渦糸は竜巻のようにうねったり動いたりしやすい．おまけに層の間に扁平な形でもぐり込んだりすると，異常な振舞いをする．

18.2 100 万ボルトホログラフィー電子顕微鏡の開発

100 万ボルトホログラフィー電子顕微鏡の開発は，計画から数えると，実に 15 年もかかってしまった．実現が難しかった理由にはいろいろあった．

まず，電界放出電子線には放電は禁物である．大きな放電を起こすと，電子源の針先が丸まってしまう．さらに，針先から出てくる電子線のエネルギーの“ばらつき”は 0.3 ボルト程度であるが，この単色性を損なうことなく加速するには，100 万ボルトでは，3×10^{-7} 以下という驚異的な高圧電源の安定度が必要になる．

最も苦労したのは電子源の動きである．電子源が 50 Å と極めて小さいため



図 18.1　100 万ボルトホログラフィー電子顕微鏡.

に，電子顕微鏡が機械的に揺れたり，電子線が浮遊磁場などによって偏向され，電子源の大きさの何分の一かでも動いてしまうと，せっかくの点源がゆれて電子線の輝度が台無しになってしまう.

これらの要求を満たすべく，様々な検討を行い，結局，電子顕微鏡が 3 台並んでいるような，ものすごい恰好の装置になってしまった（図 18.1）.

さて，こんな装置を本当に作ることができるのか？ かつて，100 万ボルトの装置の開発に挑戦して，ひどい目にあった人たちがいる．その一人が，電界放出電子銃を初めて実用化したシカゴ大学の A.V. クリューである．クリューは，これまで，電界放出電子銃を実現して走査型電子顕微鏡の分解能を桁ちがいに向上させるなど，赫々たる成果を挙げた．さらに軽い原子も見ようと，1 Å の分解能性能をもつ 100 万ボルトの装置に取り組んだ．だが，今度ばかりは様子が違った．開発が長引いて，予算や人がなくなり，ついにギブアップし，研究室はさびれてしまった.

尊敬する当のクリュー先生にも相談し，「事前に基礎技術を確立しておいて，お金が出たら 2 年間で一気に完成させよう」ということにした．もたもたしたら，赤字が膨らんで失敗することは明らかだった.

中でも重要だったのは長さ 1 m にもなる加速管だった．電界放出電子銃には超高真空が必須である．そこで，これまでのガラス製からセラミックス製[傍注 1]に変えた．この加速管が振動したら，手のほどこしようがない．加速管の上下で相対振動が 50 Å より小さな加速管を実現すべく，京セラの最大の炉で作れるサイズまで太くした．太くしてがっちりしたので，振動に強くなったように思えるが，そうとも言えない．加速度は一体のセラミックス円筒からできているのではない．36 段のセラミックス円筒が薄い金属溶接でつながっている．結局，「振動を電子顕微鏡で実測してみるしかない.」という結論になった．電子顕微鏡は，またとない“微振動の検出器”なのだ.

試作した加速管の上に電子銃，下に 20 万ボルトの電子顕微鏡を借りてきて付け，電子源の動きを直接観察することになった．何のことはない，電子顕微鏡

［傍注 1］ 1.5 m という長い加速管が振動して，上下の面が相対的にずれてしまうと，電子源がゆれることになる.

を作るのと同じ位大変な実験になった．実験の結果，揺れは，電子源の大きさよりも小さいことが分かり，後は，資金さえあればという段階に至った．

1995年，東大の北澤宏一先生が戦略基礎研究のリーダーになり，プロジェクト総額の費用の$\frac{2}{3}$の10億円をそっくり回してくれることになった．「お国が10億円出してくれるので，日立でも10億円出して欲しい」という願いを，金井社長に聞き入れていただき，20億円で本体が開発できることになった．

こうして完成した100万ボルトホログラフィー電子顕微鏡は，電子線の輝度が1968年当時の熱子線に比べると4桁向上し，電子顕微鏡としての格子分解能[傍注2]は0.5Åを超える世界記録を達成した[1]．

[傍注2]　単結晶の場合，原子が規則正しく並ぶ．格子間隔は一定の値をもっているので，格子分解能は，電子顕微鏡の線分解能の指標になる．これに対して，点分解能は原子の様な点状の物体を見分ける能力．

100万ボルトホログラフィー電子顕微鏡の登場によって，高温超伝導体中の磁束量子の面白い振舞いが観察できるようになってきた．

18.3 高温超伝導体中の磁束量子

磁束量子は，棒磁石のようなものなので，互いに反発する．だが磁場をかけて詰め込むと稠密構造をとり，びっしりと格子状に並ぶ．

ところが高温超伝導体は均一な材料ではない．超伝導の板がたくさん重なったような層状構造をしている．このため，それを反映して磁束量子は複雑な振舞いをする．まっすぐ通るはずの磁束量子がジグザグになったり，高温度になると竜巻のように，うねったり動き回ったり，からまりあったりすることが予測されている．このように曲がりくねったり，動きやすい磁束量子を点欠陥でピン止めするのは至難の技である．

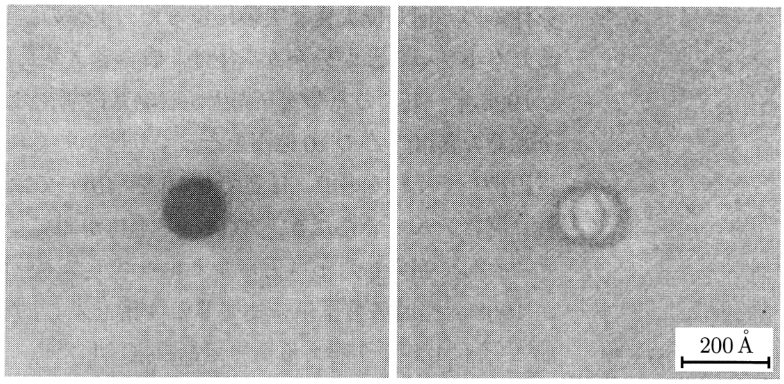
だが，良い方法が見出されている．高温超伝導体に高速の重イオンを照射すると，イオンが通過した軌道に沿って結晶が壊れ，円柱状のアモルファス[傍注3]の領域が生じる．この領域は超伝導にならないため，層間をまたぐ有効なピン止めになる．磁束量子の常伝導芯がこの円柱の中に落ち込むと，もはや，どの層の磁束量子も動くことができないので，磁束量子全体が一挙にピン止めされてしまう．しかし，何しろミクロの世界のことなので，本当に磁束量子が柱状欠陥に捕捉されているかどうかを直接確かめる術はなかった．100万ボルトホログラフィー電子顕微鏡を用いたローレンツ顕微鏡法で，初めて高温超伝導薄膜内部の磁束量子の様子が観察できるようになり，どの磁束量子がどの柱状欠陥に捕捉されているかを見分け，その振舞いを観察することが可能となった[2]．

[傍注3]　原子が規則的に並んでいるのが単結晶で，ランダムに並んでいる状態をアモルファスという．

18.4 柱状欠陥にトラップされる磁束量子

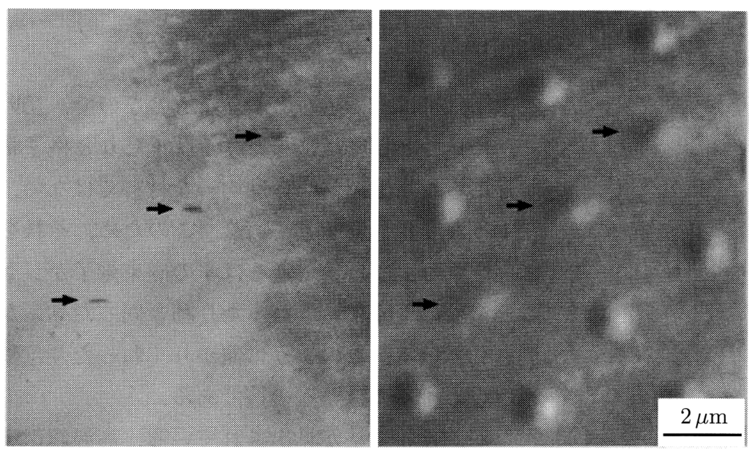
厚さ4000ÅのBi-2212[傍注4]薄膜に，傾いた方向から高速イオンを照射し柱状欠陥を導入する．円柱を軸方向から見たときの電子顕微鏡写真を図18.2に示す．欠陥はきれいな円柱形をしている．ちょっと傾けて見ると，円柱の上面と下面の2つの円が少しずれて観察できる．内部は非晶質なので超伝導にはならない．この薄膜を30°傾け，磁場を印加し，上から平行な電子線をあて，ピ

[傍注4]　$Bi_2\,Sr_2\,CaSu_2\,O_{8+\delta}$で表せる酸化物高温超伝導体で，略してBi-2212と呼ぶ．



(a)　　(b)

図 18.2　柱状欠陥の電子顕微鏡写真．(a) 円柱方向から見た像，(b) 少し傾けて見た像．



(a)　　(b)

図 18.3　傾いた柱状欠陥を有する Bi-2212 薄膜．(a) 欠陥の電子顕微鏡像，(b) 磁束量子のローレンツ顕微鏡像．矢印で示した楕円形の磁束量子像は，欠陥の位置に生じ，柱状欠陥に捕捉されている．捕捉された磁束量子は傾いているので，像も楕円形となっている．

ントのはずれた面を観察すれば，ローレンツ顕微鏡像として磁束量子が観察できる．

「果たして，磁束量子がこの柱状欠陥にトラップされているのだろうか？」—結果を図 18.3 に示す．

この楕円形のローレンツ顕微鏡像が，柱状欠陥にトラップされた磁束量子である．これは，電子顕微鏡とローレンツ顕微鏡像を見比べれば明らかである．電子顕微鏡像（図 18.3 (a)）では，柱状欠陥が細い黒い線として観察できる．ピントをぼかすと，欠陥は見えなくなるが，さらにピントを大きくはずすと，磁束量子が（図 18.3 (b)）ローレンツ顕微鏡像として現れる．ピントをぼかして初めて見えてくるというのは，不思議な感じがするかも知れない．ピントをずらすことによって，位相変化を強度変化に変換するのである．位相物体の特徴である．電子顕微鏡で軽元素からなる生物試料を見るときは，ピントをぼかし

て，コントラストをつけている．

磁束量子の像と柱状欠陥の電子顕微鏡像を比べると，楕円形の磁束量子が欠陥の位置に生じている．これに対して，欠陥のない領域には，円形の磁束量子が観察できる．こうして楕円形の像は，柱状欠陥にトラップされて斜めに傾いた磁束量子の像であり，円形の像は，膜を垂直に突き抜ける磁束量子の像であることが判明した．この結論は，シミュレーションによっても確認された．

円柱と同じ方向に磁場が印加されたときには，磁束量子が柱状欠陥に捕捉されることが分かったが，磁場が全く異なった方向に印加されたときにも磁束量子が柱状欠陥に沿ってトラップされることも分かった．常に円柱の方向に磁場をかけなければ強いピン止めが生じないというのでは実用的でない．

磁束量子の像が柱状欠陥の電子顕微鏡像に比べると，いやに大きいことに気づいた方もいるかもしれない．これは高温超伝導体の特徴である．高温超伝導体中の磁束量子は，渦の大きさ（磁場侵入長）がBi-2212の場合2000 Åと大きいことに由来する．それに対して，常伝導芯のほうは10 Åと極めて小さい．このため，高超伝導体の磁束量子は，原子オーダーの小さな欠陥でもピン止めされる．

18.5 チェーン状に並ぶ磁束量子の謎

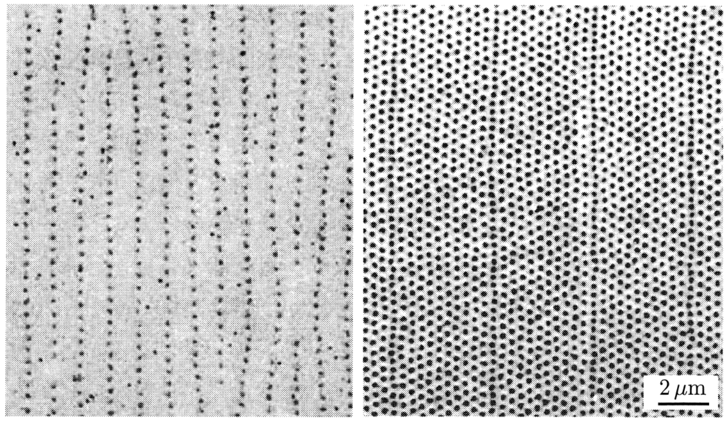
高温超伝導体中の磁束量子の不思議な挙動は，磁束量子の配列にも現れる．磁束量子は，棒磁石のようなものなので，お互いに反発するが，磁場をかけると詰め込まれて，通常，三角格子の稠密構造を取る．ところが，磁場を高温超伝導体の層面すれすれに傾けると，磁束量子が三角格子ではなく不思議な配列を取ることが1991年，ベル研究所のP.ギャンメルたちによって見出された[3,4]．図18.4のビッター写真を見ると，磁束量子が縦に列を組んで並び，稠密構造とはほど遠い配列をしている．どうして，こんな配列になってしまうのか？ YBCO[傍注5]ではすべての磁束量子がチェーン状に並び，チェーンの間には，すき間がいっぱいあいている．何か，はっきりとした理由があるはずである．一方，異方性の大きなBi-2212では所々にチェーンができている．これも不思議である．

［傍注5］ $YBaCu_3O_{7.8}$ で表せる酸化物高温超伝導体で，略してYBCOと呼ぶ．

YBCOの配列に対しては，こんな説明がなされていた．磁場が傾いていると磁束量子もその方向に傾き，傾斜方向に並んだ磁束量子の間に引力が働き，チェーン状に並ぶというものである．しかし，“表面の像” しか写らないビッター写真（図18.4）では，内部で傾いているか知るよしもない．だが電子顕微鏡で透過像が見えれば，内部の磁束量子の様子を知ることができる．

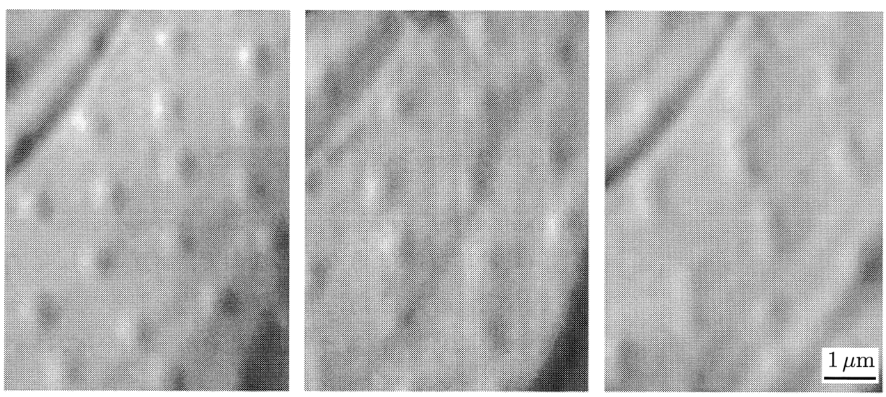
そこで，100万ボルトホログラフィー電子顕微鏡でYBCO薄膜の透過像を観察した結果，案の定，磁場の傾きを増やしていくにつれて，磁束量子の像が細長くなり，チェーン状につながっていく様子が直接撮影できた[5]（図18.5）．予測されていた通りに，磁束量子が傾いていくにつれて，磁束量子がチェーン状に並んでいく様子が捉えられる．

しかし，もっと不可解なのはBi-2212のほうである．所々にチェーンが現れ



(a)　(b)

図 18.4　印加磁場を傾けたときの高温超伝導体中の磁束粒子のビッター写真．(a) YBCO，(b) Bi-2212．YBCO では，すべての磁束量子が一列に並ぶが，Bi-2212 は，時々一列に並ぶ．



(a)　(b)　(c)

図 18.5　磁場を傾けていったときの YBCO 磁束量子の像．(a) θ（磁場の傾斜角）$= 75°$，(b) $\theta = 82°$，(c) $\theta = 83°$．

ている．この配列については，これまでいろいろな説が出されていた．しかし，納得のいく説はなく，10 年間にわたって謎のままであった．

例えば，J.W. スティーズ，I.V. グリゴリエバは，ビッター法の実験データをもとにチェーンや三角格子を組む磁束量子は，共に磁場の方向に傾いているが，傾きの角度がわずかに違っているのだと主張し[6]，アルゴンヌ国立研究所の理論家 A.E. コシェレフは，もっと突飛な配列を提案した．磁束量子は傾いておらず，超伝導の板と板の間を磁束量子が扁平な形で突き抜け，それと直交する磁束量子が密に並んでチェーンを作っているという[7]．扁平な磁束量子と交叉していない垂直な磁束量子は通常の三角格子を組む．

しかし多くの人は，互いに直行する 2 種類の磁束量子が存在し，交叉しているなどという複雑なことが起こるとはあり得ないと考えた．というのは，直交している磁場は相互作用しないので，垂直な磁束量子が，扁平な磁束量子の場

所に集まってくる理由がないためである．だが，近似を上げて計算したコシェレフは垂直の磁束量子が扁平な磁束量子を交叉すると，形が多少変形してより安定な状態になることを示した．

Bi-2212 のローレンツ顕微鏡像を，100 万ボルトホログラフィー電子顕微鏡でいろいろな条件下に撮影した結果，チェーンを作る磁束量子も，その間の三角格子の磁束量子も，いずれも傾いたりせずに，層面に垂直に立っていることが分かった．傾いていれば磁束量子の像が細長くコントラストが低くなるので，それとわかるはずである．

ということは，磁束量子が板と板の間を扁平な形になって貫き，それと垂直に交叉する磁束量子が密に並んでチェーンを作っているというコシェレフの説が正しいことを直接証明することができた．

高温超伝導物質の層状効果によって，こんな不思議な磁束量子の 3 次元的な配置が実現していることが分かったのである．

18.6 フレンケル・コントローバ・モデル

磁場を層状超伝導体に斜めにかけると，YBCO と Bi-2212 では全く異なったメカニズムで磁束量子がチェーン状に並ぶことが観察できた．

超伝導体の温度を上げて T_c に近づけると，氷が水になるように，三角格子を組む磁束量子が，ある温度で，ばらばらになって融けて動き出すと考えられている．

「チェーン構造をしているときには，どうなるのか？」―ローレンツ顕微鏡法でサンプルの温度を変えながら観察した所，面白い現象が見つかった．

Bi-2212 では，三角格子が融け始める温度 85 K よりも，ずっと低い温度で，チェーン状の磁束量子だけが動き始めたのである．図 18.6 を見ると，チェーン部分の磁束量子の像が 70 K で消えていることが分かる．温度と共に次第に像が薄くなって消えていくので，磁束量子がいなくなってしまった訳ではない．「それでは，どうなってしまったのか？」

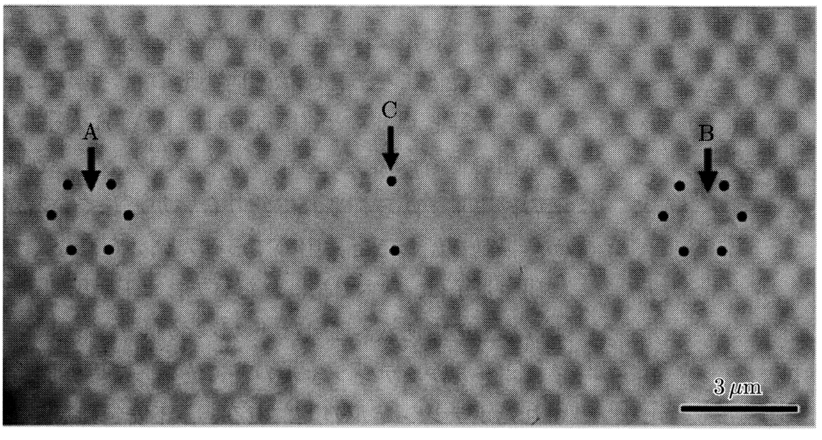


図 18.6　チェーン状に並んだ磁束量子の像の消失．

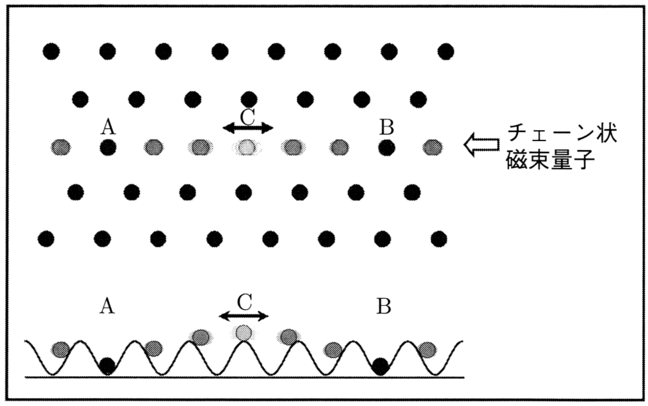


図 18.7　チェーン状磁束量子の配置.

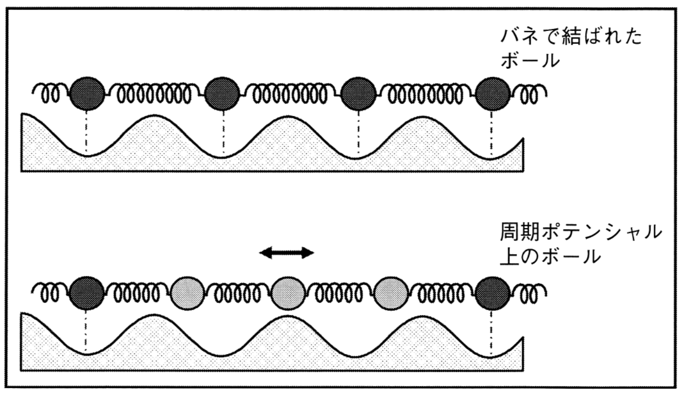


図 18.8　チェーン状磁束量子のフレンケル・コントローバ・モデル.

実は，この写真の中に，その謎を解く手がかりが写っている．チェーンをなす磁束量子でも，6 つの磁束量子に取り囲まれた安定な磁束量子 A や B は，はっきり見える．しかし，上下 2 つの磁束量子にはさまれた C は，かすかにしか見えない．

この状況を図 18.7 で模式的に示す．中央の横一列がチェーン状の磁束量子で，A, B の磁束量子は，周囲の 6 つの磁束量子に挟まれ，磁束量子は互いに反発するので安定な位置にいる．その位置から遠ざかると，だんだんずれてきて不安定な位置になる．C は，居心地の悪い場所になる（図 18.7 上）．

さらに詳しく書くと（図 18.7 下），A, B の磁束量子はポテンシャルの谷に，C は山のてっぺんにいるようなものである．これでも，極低温の場合には，両隣の磁束量子から押されて釣り合いがとれているが，温度が上がって磁束量子が熱振動を始めると，山のてっぺんにいられなくなり，左右に移動する．

磁束量子は，バネで結ばれたパチンコ玉が周期ポテンシャルの上にのっているようなものである．これは “フレンケル・コントローバ・モデル” と呼ばれている．ボールがポテンシャルの谷に位置していれば，容易には動かないが，周期のずれたポテンシャルの上にのると，不安定になる．熱振動でボールがゆれたりすると，他のボールをまきこんで山の上からはずれて，振動を始める（図 18.8）.

温度をさらに上げると，振動が激しくなってくるので，ついには，谷底にいる安定なボールをも一緒にまきこんで，全体が振動し始める．こうしてチェーン全体が消えてしまうことになる．

この新たに見出された振動現象は，実用的観点からも重要である．低い温度で一部の磁束量子が列になって振動し始め，振動が激しさを増すと，それが，三角格子の領域にまで波及する．磁束量子全体が動き始めると，これは，まさに液体状態になり，ピン止めのしようがなくなって，臨界電流はゼロになってしまうことになる．

18.7 おわりに

100 万ボルトホログラフィー電子顕微鏡の登場によって，高温超伝導体中の磁束量子の面白い振舞いがいろいろ観察できるようになってきた．

しかしこの装置は，高温超伝導体を観察するためだけの装置ではない．超伝導以外にも，ミクロの世界の極限的な観察・計測手段として，様々な可能性を開いてくれるものと思われる．百分の一波長以上の精度で位相情報を検出することによって，ナノ領域に至る磁場や電場が観測可能であり，量子力学の面白い基礎現象も観察できるようになる．これまでにない空間分解能でナノの世界を直接観察することもできる可能性もある．ひょっとしたら原子を原子モデルを見ているかのように見たり，特殊な形をした波動関数の様子を立体的に見たりする可能性も否定できない．巨大な望遠鏡を開発して遠い宇宙を見られるようになり，我々の夢をかき立ててくれるのと同様，極めつけの電子顕微鏡によって，我々に身近な対象をもっと高い分解能で見られるようにする努力もすべきだと思う．そうなればナノサイエンス，ナノテクノロジーの分野で有力なツールとして広く利用できる様になるのではないかと期待している．

参考文献

1) T. Kawasaki, T. Yoshida, T. Matsuda, N. Osakabe, A. Tonomura, I. Matsui and K. Kitazawa: *Appl. Phys. Lett.* **76** (2000) 1342–1344.
2) A. Tonomura, H. Kasai, O. Kamimura, T. Matsuda, K. Harada, Y. Nakayama, J. Shimoyama, K. Kishio, T. Hanaguri, K. Kitazawa, M. Sasase and S. Okayasu: *Nature* **412** (2001) 620–622.
3) C.A. Bolle, P.L. Gammel, D.G. Grier, C.A. Murray, D.J. Bishop, D.B. Mitzi and A. Kapitulnik: *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 112–115.
4) P.L. Gammel, D.J. Bishop, J.P. Rice and D.M. Ginsberg: *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 3343–3346.
5) A. Tonomura, K. Kasai, O. Kamimura, T. Matsuda, K. Harada, T. Yoshida, T. Akashi, J. Shimoyama, K. Kishio, T. Hanaguri, K. Kitazawa, T. Masui, S. Tajima, N. Koshizuka, P.L. Gammel, D. Bishop, M. Sasase and S. Okayasu: *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 1–237001.
6) I.V. Grigorieva and J.W. Steeds: *Phys. Rev. B* **51** (1995) 3765–3771.
7) A.E. Koshelev: *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 187–190.

（とのむら・あきら，(株)日立製作所基礎研究所／(独)理化学研究所基幹研究所）

リレー連載

現象から方程式を創り出す

第4回 —立式で鍛える論理的思考法—

砂漠化問題のバスタブモデル

西浦 廉政・寺本 敬

1. はじめに

自然現象，社会現象を問わず，数理モデルによる予測とその検証の必要性が高まってきている．まだ収束したわけではないが，新型インフルエンザにどのように対処するかも多くの教訓と示唆を与えている．実際どのような型のウイルスが出てくる可能性が高いのかというミクロレベルでの予測から，いったん流行り始めたときに，誰にどのタイミングでワクチン接種するのが効果的なのかという問題まで，疫学，バイオインフォマティクス，伝搬シミュレーションと多岐の分野にまたがる課題となっている．2001年に英国で起きた口蹄疫（foot-and-mouth disease）では，多くの応用数学者が駆り出され，農場から農場への感染モデルが作られ，さらにそれは時間的な伝搬過程を記述するモデルであったので，逆にその伝搬をどう制御できるかについても示唆を与え得るものであった．結論としては感染した牛を直ちに屠殺することで，伝搬を止めることはできないが，スローダウンさせるのに効果があることがわかり，政府は少なくとも部分的にはこの方法を実施に移し，結果として数カ月で沈静化させることに成功した．しかしより早期の対応は被害をさらに半分程度には抑えるという報告もある．いずれにせよ現代ではモデルのシミュレーション解析により，ある程度まで現実的な時間内で対応できることをこの例は示している．

しかし英国ではその前に起こったBSE（狂牛病，あるいは牛海綿状脳症）においては苦い経験をしている．1986年に初めてBSE感染牛が確認され，その後全土で発見されるようになった．1988年にBSEの人や動物への影響を調べるため，専門家委員会が設置された．肉骨粉の牛への飼料（これは一種の共食いである）は禁止され，翌年の報告書では「BSE感染牛の発生は多くとも2万頭そして人間への感染はほとんどない」と結論づけられた．しかしその後も英国以外でも感染は広がり，1996年3月に感染牛の摂取によるクロイツフェルト・ヤコブ病の患者が発生する．これはパニックの引き金となり，検証のためのフィリップス委員会が設置された．このような事態となった原因として，この病気の科学的解明の遅れと最初に設置された上記委員会の委員構成の不適切さが指摘された．後者については単に科学的見地からではなく，「欧州全体の畜産界への社会的，経済的そして政治的判断」にも関わり，科学者だけでは限界があることも指摘されている（その詳細は文献1）に詳しい）．

これらの例からわかるように，現代の我々が抱えているほとんどの問題は多くの分野に複合的に

関わり，かつ時間・空間の多層のスケールに関係する．実際，JSTの研究開発戦略センター（CRDS）による調査報告書[9]によれば，人類が直面する「10の難問」は環境変動，疫病伝染，エネルギー・食料・水，経済現象，インフラ，新機能材料，生命現象，精神現象などが挙げられており，これらはすべて階層的複雑システムに属する問題である．いずれも単純にはモデル化できない．それは関わる因子が一般には膨大であり，かつ時空間において階層的な構造を有しているからである．どの階層をどのような時間スケールで見るのかによりモデルは変わってくる．この小論で紹介するマルチバスタブモデル法は非常に素朴なモデル作成法であるが，現実に合った複雑なモデルもこれを基本としている．とくにここでは半乾燥地域における植生分布パターンの問題にその方法を適用することを試みる．人口増加とそれに伴う大規模な経済活動は地球の多くの地域で砂漠化問題を引き起こしており，それらに対して何が示唆できるかについても議論する．

2. バスタブモデル

モデルをどのように作るかという方針は単純である．すなわち

$$[変化] = [入ってくる量] - [出ていく量] \quad (1)$$

で尽くされる．なあんだ，という感じであるが，どのような量の変化に着目するのか，またそれをどのように計測し，定式化するかは別問題であり一般的にはやさしいことではない．しかしお風呂に水を入れたり出したりということに似ているので，エルナー・グッケンハイマー[2]にならい，これを**バスタブモデル**と呼ぶことにする（図1）．

バスタブを考えている系のある微小領域と思えば，そこに出入りする熱量や運動量を考えることにより，よく知られている熱方程式や運動方程式が得られる．それらが保存される場合には得られるモデルは保存則を記述するものとなる．

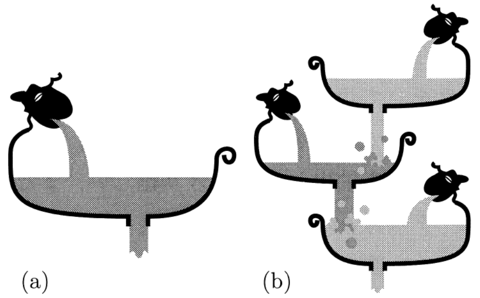


図1　(a) バスタブの図（上から蛇口で水が入り，底の出口から出て行く），(b) マルチバスタブモデル．

2.1 マルチバスタブモデル

上に述べたようにバスタブは一つとは限らず，普通はたくさんある．あるバスタブから出た水は別のバスタブに流れ，そのバスタブには別の蛇口からも流入があるだろう．さらに単なるバスタブなら，水を溜め，流すだけであるが，そのバスタブに流れ込んだ要因どうしで相互作用が起こり（一般的には非線形相互作用），そのアウトプットとして別の要因が生成され，それが他のバスタブに流れ込むことも考えられる．またバスタブからの蒸発もあるだろう．従ってより一般的には図1(b)のような**マルチバスタブモデル**が現実的となる．

3. なぜ動的モデルなのか

出生率，死亡率からGDP，医療費まで膨大なデータが毎年提供されている．それらを眺めることにより，年と共にどのように推移しているか，大体の様子を知ることができる．もっと短い時間スケールでは株価や為替レートは時々刻々提供されている．これらは激しく変動するデータであるが，ある傾向が見えることもしばしばある．結果として将来に向かって「外挿」したくなる．しかし多くの場合，それらはあてはまらず大きな損失をもたらすことも多い．例えばある一定期間を見れば，上昇，下降，あるいは周期的振舞いに見えたとしても，それが次の大きな変化への遷移状態に過ぎないことはしばしば起こり得る．単純な外挿は統計学では禁じ手であることはよく知られている．

通常は時系列解析という手段がしばしば有効であるが，一般に金融時系列の解析は簡単ではない[3]．データをして語らしむる統計的手法に頼らずに未来に向かって何かを言い得るとすれば，それを生み出す機構を抽出しないかぎり難しい．また昨今のデータは様々な計測技術の発展により，時系列ではなく，画像であったりする．そこで時間変化を記述するダイナミックモデルの登場となる．前節でそれはバスタブモデルという名前で紹介した．それは変化，すなわち時間発展するモデルなので，静的なデータ記述とは異なり，未来方向に向かって意味のある予測力をもつと期待される．その御利益は次のようなものがある．

- **現象の動的理解と相互関係**：ポジティブ・ネガティブフィードバック，フィードフォアオドなどの要因間ダイナミクスの解明．
- **制御する**：ダイナミクスの理解が進むことで，問題の予測，さらに事態が悪くならないように制御する方策が見付かる．
- **シミュレーションでのみ可能**：実験ではできない，あるいはやってはいけないが，数値実験では可能．
- **極端なスケールでの予測**：上とも関連するが，人間のスケールと比べて極端に短いあるいは長い時間や大きな空間スケールでの実験が可能．ほんのわずかな変化が長期的にどのような影響を与えるかについての定性的および定量的予測も可能．

3.1 モデル化のプロセス

上に挙げたようなデータはいずれも膨大な要因が関わっており，それらを列挙するだけでも大変である．そのために次のような順序で考え，必要に応じてこのループを回す．

1. ダイナミクスに関わっている鍵となる**マクロな要因**を取り出す．
2. それらの**要因間の関係**を洗い出す．
3. それらを組み合わせ**マルチバスタブモデル**を作る．
4. 要因間ダイナミクスの**検証**．

最後の検証過程では，入手可能な実際のデータとの照合が問題となる．過去のデータを初期値として現在データがどの程度の精度で得られるかが未来方向の予測や制御に重要となる．パラメータ値の設定や相互作用のモデル化が正しいかどうかが試される．事前にその詳細がわかっていない場合が現実問題では多いので，「失敗モデル」から学ぶことが多く，上のループは何回も回されることとなる．

3.2 モデルの縮約

重要と思われる要因に限定しても多くの場合かなりの未知数が出てくる．パターンダイナミクスでよく知られているBZ-反応（ベルーゾフ・ジャボティンスキー反応）[11]においても関わる素過程は百を超える．しかし反応ダイナミクスを支配するのは律速過程と呼ばれる最も遅い反応である．それにくらべて十分に速い反応はすべて定常状態にすみやかに落ち着くと（すなわち時間微分は零）仮定すれば，反応が多項式で書けるなら代数方程式を解くことにより大幅な未知数の縮減が可能となる．これは**擬似定常状態法**という時空間スケールの違いを利用したモデル縮約法の一つである．これ以外にも様々なモデルの簡約化は知られている．線形化近似，中心多様体近似，特異極限法や離散的なものを連続場で近似する平均場近似などは良く知られているが，ここでは述べない[11,12]．

ここでバスタブ法による簡単な応用例として感染症モデルを作ってみよう．最初に述べたように鳥インフルエンザを始め，様々な感染症との闘いは人類の抱えている大きな問題であり，社会構造，輸送手段の変化と共にその予防の方法や伝搬の仕方も変化してきている．ここでは最も簡単な，しかし定性的には多くの重要な情報を与えるケルマック・マッケンドリック方程式に基礎を置くSIRモデルと呼ばれるものをバスタブ法の考え方で作ってみよう．まずSIRの頭文字はバスタブの状態変数である，未感染者（Susceptible），感染者（Infected），回復者あるいは死亡者（Recoverd or Removed）

をそれぞれ表す．感染は感染者が未感染者と接触することにより起こり，感染者の一定の割合γは回復あるいは死亡することによりRのバスタブに入っていく．最も注意を払わねばならないのは感受性をもつ未感染者が感染者と接触する際のダイナミクスをどう記述するかである．ここでは化学反応と同じように接触する頻度に比例して病気が伝染すると考えよう．具体的には各感染者が単位時間あたりb人に接触するとすれば，そこから生まれる新たに生まれる感染者は$bI(S/N)$に比例するはずである．S/Nという比が出現するのは，接触により感染するのは全人口N（今は一定としている）のうち，未感染者Sに出会うときのみだからである．以上を式で表現すると次のようになる．

$$\begin{cases} S_t = -\beta SI, \\ I_t = \beta SI - \gamma I, \\ R_t = \gamma I, \end{cases} \tag{2}$$

ここで係数βは$\beta = b/N$であり，全人口$N = S + I + R$は一定であることは上の式からすぐわかる．この意味でこれは閉じた系である．すなわち生誕出生や移民による増加を考えていないし，死亡者もRのバスタブに入れている．

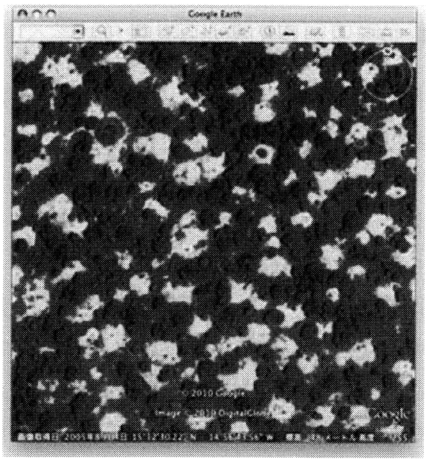
感染症はこれまでの歴史が示すようにしばしば周期的に爆発的なパンデミックを繰り返してきた．上のモデルはそのような振動する時間変化は示さない．これは新たな未感染者が供給されず（Sの右辺の符号は常に負），最終的には全員が免疫（死ぬことで感染しないことも含め）をもつことになるからである（Rの右辺の符号は常に正で単調増加）．回復しても免疫をもたない感染症（淋病がそうである）あるいは出生による免疫をもたぬ新たな未感染者も考慮せねばならない．それらの諸問題を含め，より詳しい感染症モデルについての解説および文献についてはこの連載の次回の稲葉氏の解説および著書[4)]を参照されたい．次節以降ではいよいよ砂漠化の問題を論じる．

4. フラスコ反応系から地球反応系へ

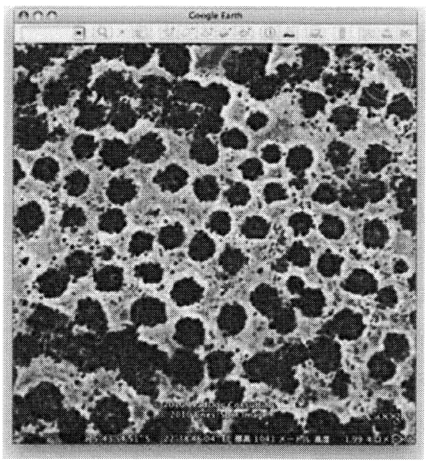
新千歳空港を飛び立つと，季節ごとに色彩豊かな農場のパッチワーク模様を楽しむことができるが，その一方では，森林伐採後に放置された荒廃地も虫食い状に散らばり，それらの間を縫うようにして残った森を野生動物が行き来している．そして羽田空港に近づき，飛行機が高度を下げれば，見渡す限りの広大な都市砂漠である．電車に乗り換えると，わずかな土地で細やかに管理された花の咲く木が意外に多く目にはとまるが，その植生の割合は乾燥地域の「砂漠」と同程度である．

4.1 食料増産と砂漠化

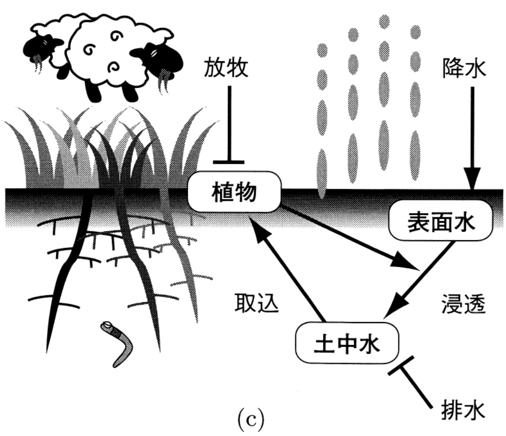
アフリカには世界最大の乾燥地域，サハラ砂漠があり，その周縁地域では深刻な砂漠化が進んでいる．主要産業は農業であり，人口増加による食糧不足，貧困のために土地の許容力を超えた過耕作や過放牧がなされている．最近では，中国，インドを含めた先進国の食糧を確保するための大規模な耕地開発競争も激しいという．図 2(a) はサハラ砂漠西端に近いセネガルの航空写真であり，黒地の草原にスポット状の白い荒廃地が散らばる植生分布パターンである．逆に，同じアフリカのザンビアの写真（図 2(b)）では，スポット状の緑地が荒廃地に点在している．世界中では毎年，四国と九州を合わせた面積の土地が砂漠化しているといわれたりもするが，地球規模での定量的な状況把握は，Google Earth 等，ICT インフラを享受した世界市民による環境監視と多数決によってもたらされるようになるのであろうか．本稿では，極めて降水量が少ない乾燥地域での砂漠化，人間活動が著しい湿潤地域での砂漠化ではなく，乾燥地域と湿潤地域の中間程度の降水量である**半乾燥地域**での砂漠化のバスタブモデルを紹介する．半乾燥地域とは，従来，遊牧民による「放牧」が行われてきた草原をイメージしてもらいたい．自然と人間の共生バランスの変化を受けやすい土地であって，近年，顕著に砂漠化が進むこの地域で見られる特徴的な植生分布パターンの出現メカニズムについて考察する．



(a)



(b)



(c)

図 2　Google Earth による植生分布の航空写真 ©Google．黒が緑地，白が荒廃地を示す．(a) セネガル，北緯 15.12 度，西経 14.56 度，(b) ザンビア，南緯 15.44 度，東経 22.56 度，また，(c) は植生分布のバスタブモデルの模式図である．

4.2 半乾燥地域における植生モデル

図 2 (c) は，「降水圧（自然環境）」と「放牧圧（人間活動）」の変化に対する影響を調べるため，「植物」と「水」の時空間分布を状態変数としたバスタブモデルの模式図である．地表に降った雨水は，一旦，土中に蓄えられてから，植物に根から吸収されるものとして，水を「表面水」と「土中水」の 2 種類に分けて考える．

[植物の変化]
= [生産] − [放牧による消耗] ± [分散],
[土中水の変化]
= [浸透] − [排水]　　(3)
− [植物への取込] ± [分散],
[表面水の変化]
= [降水] − [浸透] ± [分散].

植物の生産力は，植物量 P に比例し，土中水 W が多いほど強まる．土壌の許容力を仮定して W について飽和するものとし，それを Michaelis–Menten 形式（あるいは Hollig type II 型）を用いて表せば $P \times W/(W + k_1)$ が適当だろう．植物は根から水を取り込むので，土中水はその分，消費されることになる．そして，人に「放牧」された家畜の餌として植物は消耗する．

庭の草むしりを手伝えば，植物の繁みが深いほど地中深く根がはり，ミミズやらオケラやら，土壌生物も豊富でフカフカな地面であることが多い．大学キャンパス内の草むらにできた近道など，踏みつけられて固くなった地面では，雨水は表面をさらうだけで，旺盛な繁殖力を示すセイヨウタンポポさえも遠慮がちにみえる．つまり，表面水と土中水とを分けるのは，土地の荒れ具合を水の浸透具合で表すことに相当する．実際，中国では遊牧民に対して定住政策をとったがために，村を中心とした過放牧による砂漠化が進んでいる．そのような土地では，地表部でのバイオマス（植物量）が少ないと，繁殖する植物の多様性も失われ，地下部のバイオマスも少なく，根のはり具合も浅い分布である傾向がみられる[6)]．よって，植物量 P

は表面水 O から土中水 W への「浸透」を促進すると仮定する．乾いた砂地ほど早く浸透し，十分潤った地面では次第に飽和するものとして，やはり式で表せば，$O \times (P + k_2 W_0)/(P + k_2)$ である．このとき，植物が生えてなくとも，水は土中に浸透する（$W_0 \neq 0$）．

最後に，種の飛散や水の分散をそれぞれ線形拡散で近似すれば，モデルイメージ (3) から次の反応拡散系モデル方程式を書き下せる[7,8]．

$$\begin{cases} P_t = k_0 \alpha \dfrac{W}{W + k_1} P - GP + D_P \triangle P, \\ W_t = \beta O \dfrac{P + k_2 W_0}{P + k_2} - \gamma W \\ \qquad -\alpha \dfrac{W}{W + k_1} P + D_W \triangle W, \\ O_t = R - \beta O \dfrac{P + k_2 W_0}{P + k_2} + D_O \triangle O. \end{cases} \tag{4}$$

ここで，k_i $(i = 0, 1, 2)$ は定数である．

4.3 降雨や放牧への依存性と崖っぷち特異点

モデル方程式 (4) を用いて，まずは「拡散」による空間相互作用のない，場所によらない一様な植生分布状態について考えよう．「降水圧 R」が小さければ，無植物状態 $\overline{P} = 0$ の自明解を持つ．降水圧を強めていくと，自明解が不安定化し，ある一定の植物量を持つ非自明解 $\overline{P} = k_0(R - \gamma k_1 G/(k_0\alpha - G))/G$ が出現する．その分岐点は，図 3 (a) に示した状況では $R = 1.0$ である．パラメータ γ は土壌の排水力である．

空間相互作用（拡散）を考慮すると，非自明解は出現した直後に分岐点 T_1 でチューリング不安定となる（$R_{T_1} \simeq 1.0$）．さらに降水圧を強めていけば，チューリング分岐点 T_2 を経て，この空間一様解は安定性を回復する．つまり，雨が十分に多い湿潤地域では，大地は緑で満たされている．図 2 (a), (b) の航空写真で示したようなパッチ状の植生分布パターンが形成されるのは，この 2 つのチューリング分岐点に挟まれるような半乾燥地域である．式 (4) の空間 2 次元シミュレーションから，図 3 (b) に示すように，降水圧 R の強さによって，色反転したスポット状パターンが得られる．また降水圧が適当であれば，図 3 (b) の中央

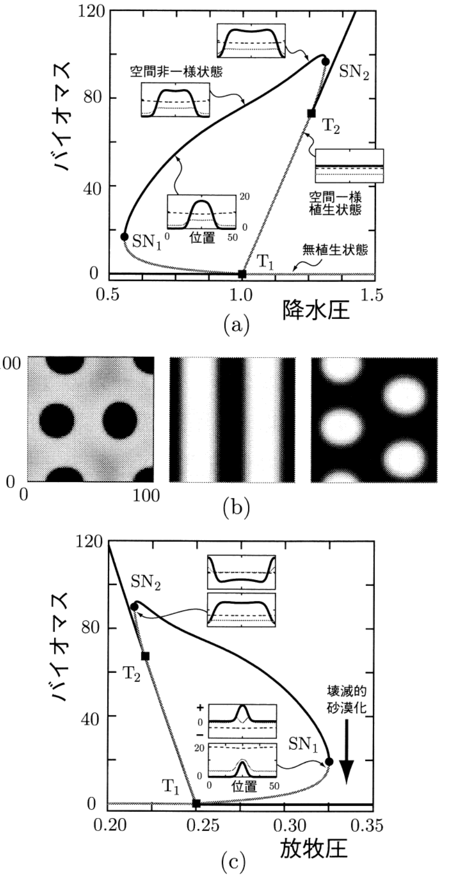


図 3　(a) 空間 1 次元パターンの大域分岐図．降水圧 R をパラメータとし，放牧圧は $G = 0.25$ に固定した．■印は，空間一様解のチューリング分岐点 $T_{1,2}$，●印は，空間非一様解のサドルノード分岐点 $SN_{1,2}$ を表す．挿入図は，降水圧がそれぞれ 0.75, 1.00, 1.25 のときの状態変数のプロファイルを示す．特に，黒太線は植生分布 P である．(b) 空間 2 次元での植生パターン．左から順に降水圧を強めている．(c) 放牧圧 G をパラメータとした大域分岐図（$R = 1.0$）．挿入図は，分岐点 $SN_{1,2}$ 近傍での状態変数（下）とその不安定化モード（上）のプロファイルを示す．

の図のように，帯状パターンも存在する．これは一見奇妙に思えるが，降水圧を大きくしたときに，パターンが白黒反転する際に経由せねばならない形状とも見ることができる．

図 3 (a) では，空間非一様植生分布パターン（2 モード帯状解）の大域分岐を示している．チュー

リング分岐点 $T_{1,2}$ はどちらもサブクリティカルで生じるために，振幅の小さな空間非一様解は不安定である．それらはサドルノード分岐点 $SN_{1,2}$ を経て安定性を回復し，これら 2 つの分岐点に挟まれたパラメータ範囲で安定に存在する．分岐点 SN_2 近くの解では，ほぼ空間全体に植物が分布しているが，降水圧が弱まるにつれて，その分布範囲（2 モード解のドメイン幅）は狭まっていく．**さらに降水圧を弱めると，砂漠（無植生分布）状態に連続的に至るのではなく，もう一方のサドルノード分岐点 SN_1 によって不連続に（壊滅的に）遷移してしまう．**この分岐点 SN_1 とチューリング分岐点 T_1 の間は，砂漠状態である一様自明解とそれからサブクリティカルに生じた空間非一様解が共存した**双安定状態**になっている．

図 3 (c) は「放牧圧 G」を分岐パラメータとした大域分岐図である．こちらも 2 つのサブクリティカルチューリング分岐を持ち，**放牧圧を強めて，サドルノード分岐点 SN_1 を過ぎると，壊滅的な砂漠状態への遷移を起こす**構造である．降水圧 R と放牧圧 G の 2 つのパラメータ空間でみれば，その原点で 4 つの分岐点は一致し，それぞれパラメータを増加させても，分岐点の順序関係が入れ替わることはなく，空間一様状態と非一様植生状態の双安定構造は保たれる．放牧圧が強いと，サドルノード分岐点 SN_1 は降水圧の強い側へ移動し，壊滅的砂漠化が発生しやすくなる．分岐点 SN_1 を超えて，砂漠化してしまった土地を回復させるには，チューリング分岐点 T_1 まで放牧圧を弱める必要がある．一度こぼした雨水を大地の盆に返すのは大変である．

改めて，Google Earth を用いて見つけたセネガルとザンビアの植生分布パターン画像を見比べてみよう．セネガルでは砂漠化が始まったところであり，ザンビアは砂漠化への崖っぷちにあると解釈できる．このような半乾燥地域は本来は草原で覆われており，現在もそれを潤すだけの降水量はあるだろう．しかしながら，過放牧や過耕作など，自然と人との共生バランスが失われることで砂漠化が進む．壊滅的な砂漠化が発生した前後では，再生緑化に必要な労力，経済的コストは大きくなる．図 3 の分岐図で，共存状態に挟まれた領域の面積が**ヒステリシス損**の大きさの目安である．

古代文明の多くは大河の流れる乾燥地域で発生したが，いつのまにか減退してしまった．文明の発展に伴って人間活動が活発になったがゆえに，土地の許容力を超えて砂漠化が進み，王朝一代の時間スケールでは解決できない規模での飢饉や貧困が発生したのだろうか．一方，現代の先進国はすべて湿潤地域にあるにも関わらず，人間活動の中心は農業から工業へと移り，やはり，見渡す限りのコンクリート砂漠を築き上げてしまった．この先，大きな運命的破局が迫っているのかもしれないが，温度も湿度も一定の快適な室内にすっかり慣れてしまった五感には，自然に従う不安定な環境に再び身をおくことはおろか，少しの後戻りにさえも勇気がいるであろう．

5. 破局の予兆は感知できるか

北海道のニセコでは，冬場のスキー客の要望もあり，これまで立ち入り禁止であった区域の開放を実施している．そこでの最大の問題は雪崩の事故防止である．雪を切り取っての調査や小さな爆発を起こして，雪崩が起こる可能性を調べる．小さな摂動をかけて系がどう反応するかチェックし開放するかどうか決定している．砂漠化問題を含め，「小さな爆発」という摂動実験は多くの現実問題ではそう簡単には実施できない．しかし一方で現実の自然現象，社会現象は常に小さな摂動はかかっているとも見られるので，適切な量に着目すれば，雪崩の予兆を知ることができるかもしれない．

5.1 イースター島の悲劇

イースター島は，面積が佐渡島の 4 分の 1 で 180 平方キロ程度の小さな島であるが，10 世紀頃には既に極めて高度な文明が栄えたことが知られている．モアイ像はその遺産の一つである．しかしこの社会は突然崩壊した（17 世紀頃と思われる）．主な原因は人口増加に伴う大規模な森林破壊と考え

られている．その森林破壊は土壌の劣化と流出をもたらし，同時に，漁業に使用するカヌーの調達を不可能にし，結果として食糧不足の深刻化，さらに枯渇する資源を巡って，争いは日増しに激しくなり，ついには人食いが始まり，最後は社会全体が崩壊してしまったと考えられる．熱帯雨林帯にある島とは異なり，イースター島は南緯27度，西経109度あたりに位置するため，はるかに樹木の生長は遅く，雨の量も少ない．島の大きさ，資源の総量とそれに見合う人口の許容量が小さかったため，非常に短期間で崩壊に至ったと考えられる[5)]．

5.2 予兆の予測

イースター島の悲劇は他人事ではなく，今日の大量消費および資源の有限性を考えると，地球規模で同様なことが進行していないと誰も断言できないだろう．大事なことは，そのような破局が起こり得ることを示唆するだけではなく，その**予兆**を予測できるかということになる．我々の身体感覚レベルから地球全体が出す様々なSOS信号を用いて，我々はどこにいて，どこに行くのかを予測できるであろうか[10)]．前節で得た教訓はそのような破局はサブクリティカル分岐–サドルノード分岐–双安定構造という特異点構造が担っている可能性があるということであった[13)]．従って現状態がサドルノード分岐点にどれだけ近づいているのかということが問題となる．簡単なスペクトルの計算からサドルノード分岐点では，単純実固有値が原点を横切ることがわかる．これより小さな摂動を加えつつ分岐点に近づいていくと，緩和時間がどんどん長くなる，自己相関がどんどん大きくなる，分散が発散する，というような定量的変化が起こることがわかる．実際の現象では小さな摂動やノイズが常にかかっているとするならば，これらの傾向は一定の期間，特徴的な量に着目して計測すれば，発見が可能かもしれない．ここでの「特徴的な量」は様々な時系列であり，砂漠化のようなパターンの変化，さらにはそれらの複合的量であろう．巨大地震，地滑り，局所集中豪雨など日本においても，様々な時間スケールでの**予兆の予測**が求められており，そこではサドルノード分岐点に対応するような，**崖っぷち特異点**の同定が急がれている．モデリングとその数理解析はそのような特徴的量，特異点の発見に不可欠なアプローチの一つと考えられる．

参考文献

1) 小林傳司，『トランスサイエンスの時代』，NTT 出版 (2007).
2) Stephen P. Ellner and John Guckenheimer, *Dynamic Models in Biology*, Princeton University Press (2006).
3) 刈屋武昭，矢島美寛，田中勝人，竹内啓，『経済時系列の統計—その数理的基礎—』，統計科学のフロンティア 8，岩波書店 (2003).
4) 稲葉寿（編著），『感染症の数理モデル』，培風館 (2008).
5) J. Diamond, Collapse -How societies choose to fail or succeed-, Penguin Books (2005).
6) 根本正之，『砂漠化ってなんだろう』，岩波ジュニア新書 (2007).
7) R. Hillerislambers *et al.*, Vegetation pattern formation in semi-arid grazing systems, *Ecology*, **82**(1), 2001, pp.50.61.
8) M. Rietkerk *et al.*, Self-Organized Patchiness and Catastrophic Shifts in Ecosystems, *Science* **305**, 1926–1929 (2004).
9) 科学技術振興機構（独）研究開発戦略センター（CRDS），「新興融合分野研究検討報告書—社会の課題解決と科学技術のフロンティア拡大を目指して—」，CRDS-FY2008-XR-01 (2009).
10) M. Scheffer *et al.*, Early-warning signals for critical transitions, *Nature* **461** (2009) 53–59.
11) 西浦廉政，『非線形問題 I—パターン形成の数理—』，岩波講座・現代数学の展開 7，岩波書店 (1999).
12) Y. Nishiura, *Far-from-equilibrium Dynamics*, AMS (2002).
13) 西浦廉政，『自己複製と自己崩壊のパターンダイナミクス』，岩波講座・物理の世界，岩波書店 (2003).

（にしうら・やすまさ，北海道大学電子科学研究所）
（てらもと・たかし，千歳科学技術大学総合光科学部）



「ゆらぎ」の研究

宮下 精二

どうして物理の研究者になったかということですが，自分でもよくわからないので，あまり参考にならないかもしれませんが，これまでどのように研究をしてきたかについて，研究生活の経緯やそのゆらぎをご披露したいと思います．できるだけ若いときのことから思い出しながら書きますので，不正確な部分もあるかもしれませんし，勝手に美化してしまっているところもあるかもしれませんがご容赦下さい．

1. 大学院に入るまで

理科が好きだということは，中学のときの理科第一分野の成績がよかったからだと思う．たぶん，最もコストパフォーマンスがよい，つまり，少し覚えれば何とかなる科目という認識だったと思う*1)．

私の育った兵庫県は当時高校受験の制度が変わり，内申書と思考力テストというもので入学が決まるようになった．この思考力テストは理科の話題が取り扱われ，この功利的理科少年は大いにはりきった．その模擬テストか何かで，衛星の周期を求める問題があり，少し進むと少し落ちるということから答えを出し，大いばりだったことを覚えている．高校に進んでからも，理科は好きであったが，担任の先生（田中照晃先生）の影響もあり，物理より化学のほうが好きだったように思う．ただ，図書室で量子力学などという言葉を発見してから，物理が意識に出てきた．

大学に進んでからは，何となく物理に進学するものと思いこんでおり，あまり深く考えずに物理学科に進学した．学部への進学振り分けの希望は（物理，数学，哲学）で典型的理Ｉ学生（？）の一人だったようだ．この数学希望は，2年生の前期に河田敬義先生の代数と幾何の授業の影響だと思う．猛烈な速さの板書で，頭を無にしてノートを取らないと書き損じてしまうため，どのようなことかなど考える余地なくノートを取った．群論という考え方はそれまで全く知らなかったので，下宿で暗号解読のようにそのノートを見ていたことを覚えている．2年生はこの暗号解読と自動車運転免許の取得に終始した．進学後，物理数学の演習か何かで群論を習ったとき，5次の代数方程式が解けないことを勉強したと言ったら，何かができないということを示してもあまり役に立たないと言われ，そのようなものかと変に納得したことも覚えている．

*1) それに対し，現代国語は最も苦手で，今本人は一生懸命この原稿を書いているのであるが，たぶん読者の皆さんは変な文章と受け取られることと思う．昔，ある翻訳を引き受けたとき，編集者から「文章が生硬である.」との指摘を受けたことがある．そのとき，「生硬」とはどのような意味かと辞書を引いて，失礼な編集者と思ったが，確かに正しい指摘で，残念ながらその後もあまり進歩はないが御容赦願いたい．

学園祭である五月祭で，交通問題やその他いろいろな確率過程の問題の計算機シミュレーションを行い，その結果や制御法をエントロピーと関連させて“解析”（当時としては斬新な試み）を行ったところ，確率が振動する現象を“発見”した．もちろん，用いた式が間違っていたことは間違いない．その結果をおそれおおくも関連研究室（久保亮五研）に持って行ったところ，確率は振動しないと言われくさった覚えがある．その後も，しばらくなぜ確率が振動しないのかを考えていたが，そのままになっている．この確率振動が尾を引き，大学院の面接でやりたいテーマとして聞かれたとき，いわゆる運がついているとかつかないとかいう運勢について研究したいと言って面接の先生方には大いにうけた．今考えればそこに志望指導教官が欠席であったことが幸いしたと思っている．もう一つやりたいこととしてガラスの脆性破壊をあげた．それは，その直前に集中講義で来られた先生の案内で旭硝子に見学に行き，テレビのブラウン管が割れる様子に感動したからであった．どうもこのころからテーマに関しては非常にフレキシブルだったようだ．研究室に入ったとき，研究テーマとしてスピングラスを与えられたこととの関連は不明である．ガラスの脆性破壊についても，学会などで一，二度関連発表を聴きに行ったが，そのままになっている．卒業のときの文集の名前は「ゆらぎ」であるが，そのころから何となく「ゆらぎ」という言葉を意識し出したと思う．

2. 大学院時代

大学院では，スピングラスの勉強とともに，指導教官の鈴木増雄先生が当時発案された量子モンテカルロ法の勉強，実際のプログラム化を行った．当時は，モンテカルロ法自身が一般的なものではなく，乱数さえそれぞれの研究室の秘密で教えてもらえないこともあった．そのとき内地留学で鈴木研に来られていた黒田昭さんとほとんど見よう見まねでモンテカルロ法のプログラムを作り，最低次の近似モデルで何とか2次元 $S=1/2$ XY モデルの比熱などを求めることができた．とても臨界現象の研究に耐える内容ではなかったが，どの温度あたりに比熱のピークがあるかがわかるだけでも量子モンテカルロ法の実現という点で十分注目された．それと平行して，古典系での研究を岡山大学の川端親雄先生らと進めた．その研究の途中であったこともあり，鈴木先生がサバティカルで，XY モデルの世界的な権威であったカナダのアルバータ大学のベッツ（D.D. Betts）先生を訪ねられたとき，一緒に連れて行ってもらえた．そこでは，統計物理の分野のベッツ先生の他，高橋康，梅沢博臣の両先生，また，若き和達三樹先生がおられ，いろいろ教えてもらえた．そこでは，ちょうど Oitma–Betts の量子 XY 模型の基底状態の論文が仕上げられるときであり，その問題を変分法でやってみろと言われ，幸いなことにうまい結果が得られた．鈴木先生は夏の終わりにハーバード大学経由で帰国されたが，そのときもマクマスタ大学，コーネル大学，ハーバード大学に一緒に連れて行ってもらい，Collins, Fisher, Widom, Wilson, Halperin 先生や若手の Nelson 氏などと会えた．Widom 先生にはスケーリングではなく，アメリカンフットボールのルールを教えてもらった．

その後一人，アルバータ大学に帰り，RA（Research Assistant）のテーマとして3状態ポッツ模型の強磁場展開に取り組み，展開係数を求めるグラフ理論なども勉強した．この計算の膨大なノートは残っている．その結果をベッツ先生に持っていったところ，どのようにして計算したかと言われ，ノートを見せたが手で計算したのでは信用できないと言われた．そこで，その手順を計算機にのせることになった．場合分けの問題であったが，ほとんど書き取りの練習のように計算をしてきていたので，その過程をプログラム化できた*2)．そこで級数を用いて3次元3状態ポッツ模型の相転移が一次相転移か二次相転移か決めようとしたが，はっきりした結論は得られなかった．この問

*2) 研究グループのみんなの前で既存のプログラムとある係数を求め，同じ結果が出るかどうかチェックしたとき緊張したことを覚えている．幸いにも同じ数字が得られ，かつ既存のものよりはるかに高速であったが，残念ながらそのプログラムはなくなってしまった．

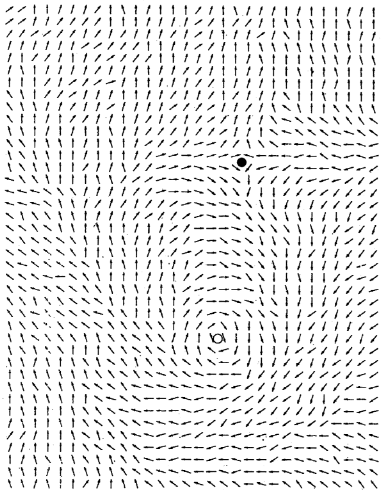


図 1　2 次元 XY 模型の渦構造（白丸が+，黒丸が−の渦）(S. Miyashita, H. Nishimori, A. Kuroda and M. Suzuki: *Prog. Theor. Phys.*, **60** (1978) 1669 より転載).

題は，その後，大川・福来（*Phys. Rev. Lett.* **63**, 13 (1989)）によって非常に弱い一次相転移であることが明らかにされた[*3)]．カナダでの変分法，級数展開の経験は，やれば何とかなると腹が据わったという意味で，その後の研究活動に非常に役立ったと思う．

カナダ訪問中，古典 XY 模型の計算は日本で西森秀稔氏を中心に続けられ，きれいな結果が得られた．その当時計算は有料の大型計算機センターで行われた．貧乏性の私は答えがだいたいわかる程度の短い計算しかできず，プレリミナリーなグラフしか得ていなかった．しかし，私がいない間に計算機予算を使い切る当時としては大規模な計算の結果，非常にきれいな結果が送られてきたのにびっくりしたことを覚えている．その成果は，帰国後論文発表した．そこでは有限サイズ効果を積極的に用い，XY 模型のいわゆるコスタリッツ・サウレス・ベレジンスキー相，あるいはマスレス相を明らかにした．その方法は，現在，現象論的繰り込み群の方法と呼ばれているものである．また，その論文に 2 次元 XY 模型の渦対消滅の図を載せた（図 1）．

この図は *Physics Today* に無断掲載されるなどそれなりに注目されが，私自身は KT 転移の本質である周期性の有意化という機構を理解せず，相転移付近で渦対消滅の様子が全く見えないことから，当時はその機構に懐疑的で何人かの議論を挑んだことを覚えている（ケース A1）．幸いこの問題は博士論文までにモンテカルロ法繰り込み群の方法などを通して本人的には理解できた．対応する実験が物性研の平川金四郎先生によって K_2CuF_4 で行われ，いろいろ議論していただき何となく研究者気取りになれた．平川先生はその後のフラストレート磁性体でも懇切なご指導をいただき，いろいろなお話を通して，物理はロマンという考え方を実感として教えていただいた．

幸いなことに，院生時代は何回か再びアルバータ大学を訪ね，カナダで夏を過すことができ，カナディアンロッキーの案内と平行して研究を行った．特に，熱・統計力学の国際会議がアルバータ大学で開かれたときは，現地手伝い要員として働いた．そのとき先生方を案内して近くの国立公園に行ったときの写真をお見せする．

また，平行して研究を進めていたスピングラスに関しては，ギンツブルグ・ランダウ的な自由エネルギーの考え方がどうしてもうまくいかないことに四苦八苦したことを覚えている．この問題は，



写っているのは蔵本由紀先生，阿部龍蔵先生，鈴木増雄先生，久保亮五先生である（著者：撮影）．

*3)　修士論文は，モンテカルロ法と変分法をテーマに書いた．日本では自分でタイプ，描図したが，ベッツ先生にそのようなことはサイエンティストのすることではないと言われタイピストを頼むことになった．図は専門家が書いてくれた．論文は郵送でよいと言われていたが，1 月になってからやはり帰って来いと言われ論文を抱えて急遽帰国となった．

今もそのままになっている（ケース B1）．フラストレーションによる相互作用の分断という考え方を導入しパーコレーション的な解析で長距離秩序を伴わない相転移と関連づけた．博士論文は，長距離秩序を伴わない相転移ということで 2 次元 XY 模型とスピングラスの研究をテーマにした．

3. 研究生活

博士卒業後，幸いに助手に採用され，研究はフラストレーションのある系に重きを置いた．目片守先生，長谷田泰一郎先生などが企画された研究会に参加し，完全にフラストレートした 2 次元イジング模型（Villain 模型）を変形した模型での一風変わった相転移の機構を発表した．この研究会は，当時話題であった，三角格子反強磁性体の複数回の相転移，特に目片先生の部分無秩序相（PD 相）に関連したもので，その後の私の研究上重要な契機になった．そこでの話にも関連し，斯波弘行先生に三角格子反強磁性体 XY 模型の研究を示唆され，いわゆるカイラリティの研究を行った（図 2）．

そこでいわゆるベクトルカイラリティを秩序変数とする相転移を調べ，カイラリティ相転移と KT 転移が独立の機構で起こることを提案した．この問題は，その後長い間否定的であったが，最近我々の当初の見方が認められてきた．その後，この研究は，川村光氏と共同研究で，ハイゼンベルグ模型やイジング的異方性を持つハイゼンベルグ模型などの場合に進んだ．そこでイジング的異方性を持つ系で，従来の PD 相による逐次相転移ではなく，スピンの各成分が逐次的に秩序化する機構を提案した．もちろん本質的に違う機構であるが，そのためか何となく PD 相には否定的な見解を持っていた（ケース A2）．しかし，この認識は間違いで，その後上野陽太郎氏のアイデアを下に，轟木義一君と 3 次元の特有な相転移機構として PD 相が実現することを明らかにできた．この部分無秩序相に対応する状態は 2 次元にはなく，3 次元で初めて出てくるタイプで 3 次元特有の秩序状態と考えられる．3 次元ではパーコレーションの様子も 2 次元とは大きく異なることは知られているが，これから進んでいくこれらの研究の先駆的なものと期待しているが，これもそのままになっている（ケース B2）．

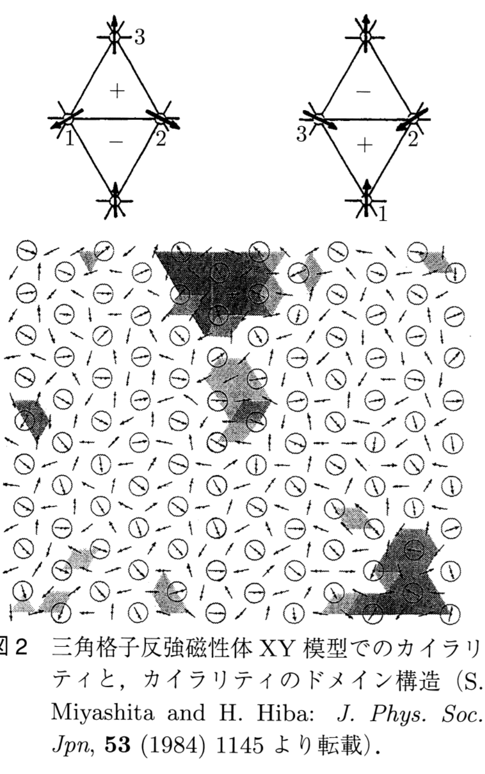


図 2　三角格子反強磁性体 XY 模型でのカイラリティと，カイラリティのドメイン構造（S. Miyashita and H. Hiba: *J. Phys. Soc. Jpn*, **53** (1984) 1145 より転載）．

また，相転移の動的性質，特に動的に特有な臨界指数の有無についても研究した．この問題は，八幡・鈴木の論文で特有な臨界指数の存在が指摘されて以来，多くの研究がされた．この問題に関しては，高野宏氏が詳しい研究を行い，少なくとも鈴木研としては決着したつもりでいたが，当時それでもまだ，いろいろな論文が出ていた．そこで，その存在に有無を言わせない結果を出すため，動的臨界現象のスケーリング解析を行い，静的な臨界現象と同じ程度の臨界領域を持つことを示し，議論を収束させた．この研究の過程で，動的過程を時間発展演算子の固有値展開として捉える考え方を導入した．この考え方に従うと，強磁性体でも対称性の破れた秩序相においては，個々のスピンの時間相関関数が単純な指数関数ではなく，$\exp(-(t/\tau)^x)$ の形をしたいわゆるストレッチト指数関数で緩和することが導かれる．同様な観点の論文が，Huse–Fisher によってなされたが，指数 x の値が異なっていた．

どちらが正しいかについては未だにわかっていない（ケース B3）．この考え方は，希釈強磁性体の緩和に現れるグリフィス特異性やスピングラスの緩和モードの研究，またさらに最近高分子の動的性質の研究でも役立っている．

量子モンテカルロ法に関しては，2 次元 XY 模型や，もっと難しい反強磁性体三角格子などでの量子効果について研究を進めていたが，その後研究が盛んになった 1 次元系や 2 次元ハイゼンベルグ模型などについては研究しなかった．それは，それらのモデルでは有限温度で相転移がないことから避ける雰囲気が研究室にあったからと思う．2 次元ハイゼンベルグ模型に関しては，1998 年になってやっと調べたが，スピン波理論を全く無視して解析したため，基底状態の秩序変数を的確に評価できなかった（ケース A3）．その後，京都大学に移ってから，山本昌司氏（現在，北海道大学）とハルデーンモデルの端の状態（図 3）などを量子モンテカルロ法で調べ，いわゆる量子スピン系の研究に進んだ．

その後，量子モンテカルロ法はいわゆるループアルゴリズムや連続虚時間の方法の導入で，また複雑系でのモンテカルロ法もマルチカノニカル分布や温度交換の方法により飛躍的に成長したが，その過程には参加できなかった（ケース B4）．これは，どうしても方法論自身に力を入れることへの躊躇があったからかもしれない．おもしろい問題があれば，普通の方法でも十分調べることができるなどと言っている間に方法が定性的に進歩してしまった．

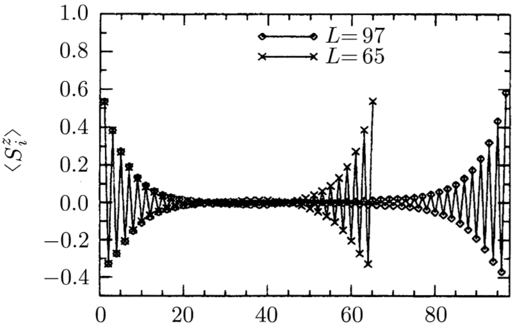


図 3　1 次元 $S = 1$ ハイゼンベルグモデルの基底状態での磁化分布（S. Miyashita and S. Yamamoto: *Phys. Rev. B* **48** (1993) 913 から転載）．$\langle S_i^z \rangle$ は局所磁化の大きさであり，L は系の長さである．

京都大学にいたころのある日，フランス，グルノーブルの Tholence 先生がセミナーに来られ，磁性体での量子トンネル効果の話を教えてもらった．それについて議論したとき，そのような効果を理論的にどのように取り扱い得るのか全くわからなかったので，その方面の研究を始めた．これは，たぶん現在でもよくわかっていない問題かもしれないが，とりあえずいろいろな計算方法を考えた．大阪大学に移ってから，その手の研究をしていた多々良源氏に助手に来てもらい量子系のダイナミックスという問題に取り組んで行った[*4]．そこで，磁場掃引時の遷移確率で現象を特徴づけようとし，磁性体でのランダウ・ゼナー機構による定式化を導入した．実は数値的にその依存性を見つけ柴田文明先生に相談したところ，それはランダウ・ゼナーだと言われがっかりしたが（ケース A4），当時，巨視的トンネル効果としてナノ磁性体の磁化緩和が実験的に話題になっていたので，その量子性のチェックとしてその公式を提案した．それに関しては，全く反応がなかった（現在ではそれらの系の量子性は否定的に捉えられている）が，その後，単分子磁性体が発見され，そこではこの提案が実証された．また，量子ダイナミックスと散逸効果の関係も調べ，齊藤圭司君とフランスのグルノーブルの実験を解析し，磁気的フェーン現象（図 4）なるものを提案した．

また，量子ダイナミックスに関しては，花村榮一先生からも師事を受け，光の量子論におけるイベントとは何かを考えるきっかけを得た．そこでは，イベントを定義するため確率的シュレディンガー方程式なるものを導入した[*5]．このイベントとは

*4）　このようなとらえどころのない問題を考えているとき，あいまいではあるが，「具体的な計算機シミュレーションができない問題は，そもそも問題として成立していない」という考えに至った．特に，トンネル現象とか非平衡統計あるいは熱力学など我々の興味をそそる問題が，単なるお題目か，何らかの内容を持っているかはこのクライテリオンが役立つように思う．

*5）　その考え方，名前まで含めて昔に導入されていた．

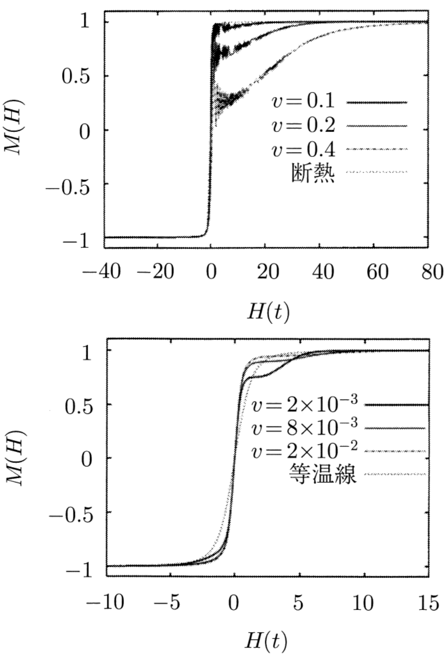


図4 磁場掃引 $H(t)$ 中の磁化の変化 $M(H)$：(上) 掃引速度 v が速い場合，速度が遅くなると変化は断熱変化に近づきプラトーの位置は上に上がるが，(下) 非常に速度が遅くなると，熱の流入によってまた下がる（磁気的フェーン現象）(K. Saito and S. Miyashita: *J. Phys. Soc. Jpn*, **70** (2001) 3385 より転載).

何かという問題は，その後オランダのDe Raedt博士のグループなど多くのグループで詳しく研究されている．これから，個別の量子現象が観測されるようになると，この分野の研究が重要になってくると思う．いわゆる“量子状態”とは何かについて，私はまだ理解できていないが，量子状態を利用した新しい情報処理の研究（山本喜久先生代表）の仲間に入れてもらい考察を深めている．

さらに，最近，西野正理氏や所裕子女史らと光による状態制御に関してスピンクロスオーバー物質についての研究も進めている．これは，秩序状態間のスイッチの問題で本来非平衡のテーマであるが，まずどのような秩序状態があるかについて，詳しく調べてきた．ここでスピンの状態というのはこれまでの磁化の向きではなく，スピンの大きさ自身であり，そのコンセプトを理解できるまで時間がかかり，関連した先生方（徂徠道夫，小島憲道先生）の手を煩わせてしまった（ケースA5）．この問題は基本的には双安定性を持つ物質の相転移の問題であり，ある種のイジング模型で表せる．しかし，通常のイジング模型とは異なりスピンの値によって状態の縮退度が違うことから興味深い温度変化が現れる．最近この問題に関して，スピンの大きさに応じて物質の基本要素（分子）の体積が変わるため，状態変化に応じて格子の変形が伴い弾性エネルギーが重要な役割をすることに気づいた．そのような場合，系の相転移は通常の短距離イジング模型の相転移ではなく，分子場理論の相転移が実現できることが確認できた．さらに，2つの状態の間をスイッチする場合の動的変化も，分子場モデルにおけるスピノーダル現象を反映した動的相転移であることも明らかにした．このモデルのように状態の変化によって体積が変わる系は多くあり，それらの系でここで調べた振舞いが見られると考えられる．この研究は，これまで手の出せなかった構造相転移への第一歩になるのではと期待している．

以上，思いつくままにこれまでの研究経緯を書いてきましたが，ある意味では思いつき，行き当たりばったりで研究を進め，不勉強の露呈や見通しの悪さ（ケースA1–5）の連続だったことがわかります．目の前の問題を自分なりに考えていくというスタイルは，それなりにあり得ると思いますが，結局わからずじまいにしてしまっていることばかり（ケースB1–4）で，あまり参考にならなかったと思います．理論といえども，このような研究スタイルが許されたことを改めて感謝するとともに，まだまだ現役なので，自分の“理解”できることをより広く，深く探していきたいと思っています．たぶん，いろいろな分野で進んでいるそれぞれの難しい理論も，テーマの“ゆらぎ”であって，人間の理解できる論理には普遍性があるのではないかなどと考えています．

（みやした・せいじ，東京大学大学院理学系研究科）

特　集（2010年6月号予告）

現代幾何と方程式

幾何学の多様な理解を目指して

本体952円

編集後記

巻頭で和田先生が「高校では「物理」としてまとめて教えられていたものが，大学にはいるといくつかの分野に分けられる」と書かれています．高校までの物理と大学に入ってからの物理の違いはこういったことも挙げられるのではないかと思います．「力学」や「電磁気」を1年間（あるいは半年）勉強することは，高校でのカリキュラムを考えると，ある意味で革新的なことのような気もします．

見方を変えると物理というものはそれだけ奥が深いものであることもわかります．小誌でも過去に，より深い物理のテーマを扱った特集がありますので，今回の特集を読んで，物理って面白い，もっと勉強したい，科学の先端を知りたい，と思ったならば是非とも手にとってもらえれば，と思います．　(R)

数　理　科　学　5月号

2010年5月1日発行

数理科学編集部　　発行人 木 下 敏 孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁